Esercizi di **Logica**
(Sul 10º problema di Hilbert)

Eugenio G. Omodeo

7 marzo 2018

Es. 1: Ridurre la versione originaria del 10º problema di Hilbert, che si riferisce a soluzioni di equazioni diofantee in $\mathbb{Z}$, all'analogo problema che intenda stabilire l'esistenza di soluzioni in $\mathbb{N}$. (Suggerim.: Si sfrutti il teorema di Lagrange dei quattro quadrati).

Ridurre il secondo di questi due problemi al primo.

Es. 2: Nella prima delle due riduzioni dell'Es. 1, triplicare (invece di quadruplicare) il numero delle incognite. (*)

Es. 3: Ridurre l'analogo del 10º problema di Hilbert che cerchi di stabilire l'esistenza di soluzioni in $\mathbb{Q}$ alla versione originaria del problema. (*)

Es. 4: Dimostrare che le seguenti proprietà e relazioni su $\mathbb{N}$ sono diofantee parametriche:

(a) $a \in \{4, 5, 9\}$

(b) $a \neq b$

(c) $a \in \{0, 3, 6, \ldots, 30\}$

(d) Fra i divisori di a c'è un quadrato perfetto

(e) a è un numero dispari

(f) a non è un divisore di b

(g) a , b , c non è una terna pitagorica

(h) a è un numero *composto* (cioè $a \neq 0$, $a \neq 1$ ed a non è un primo)

(i) a *non* è una potenza del 2

(j) a è un num. triangolare, cioè della forma $1+2+\cdots+x$ per qualche num. naturale x

(k) $a \leqslant \mathit{MP2}(b)$, dove $\mathit{MP2}(b)$ esprime la massima potenza del 2 che divide b (ad es.: $\mathit{MP2}(5)=1$, $\mathit{MP2}(12)=4$)

(l) c è il maggiore fra a e b

(m) $a>0$ e inoltre l'equazione

$$a\,X^2+b\,X+c \;=\; 0$$

con X incognita *complessa* ha soluzioni *razionali*

(n) l'equazione $a\,X^2+b\,X+c \;=\; 0$ con X incognita *complessa* ha almeno una soluzione *intera*

Es. 5: Formulare il problema della soddisfacibilità nella logica proposizionale ordinaria come sotto-problema[1] del 10º problema di Hilbert.

Es. 6: Dimostrare l'iniettività di ciascuna delle funzioni $\kappa_n \;:\; \mathbb{N}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ associate ai polinomi

$$x_1+(x_1+x_2)^2+(x_1+x_2+x_3)^3+\cdots+(x_1+\cdots+x_n)^n\;.$$

In 1971, Nikolaj Kirillovič Kosovskiĭ proposed using the polynomial

$$\kappa_n(x_1,\ldots,x_n) \quad =_{\text{Def}} \quad \textstyle\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} x_j\right)^i$$

to encode, for each n, the n-tuples over $\mathbb{N}$.

Theorem 1. *For* no n, *there are two* n*-tuples* $\langle x_1,\ldots,x_n\rangle$, $\langle y_1,\ldots,y_n\rangle$ *with components in* $\mathbb{N}$ *such that* $\kappa_n(x_1,\ldots,x_n)=\kappa_n(y_1,\ldots,y_n)$.

Es. 7: **('Cheap trick' di Putnam)** Mostrare che l'equazione diofantea parametrica

$$D(a,x_1,\ldots,x_m) \;=\; 0\,,$$

nelle incognite $x_1,\ldots,x_m$ ha soluzione in $\mathbb{N}$ se e solo se ha soluzione in $\mathbb{N}$ quest'altra equazione (con un'incognita in piú, la x_0):

$$(x_0+1)\cdot\big(1-D^2(x_0,x_1,\ldots,x_m)\big)-1 \;=\; a\,.$$

Es. 8: **(Riduzione di Skolem)** Mostrare che qualsiasi equazione diofantea può sempre venir ridotta a un'equazione di grado 4 (a patto di aumentare il numero delle incognite).

[1] Decidibile, ma a che costo?

Soluzione dell'Esercizio 1
(secondo una formulazione di Julia Robinson)

By a solution of a diophantine equation, we mean a solution in natural numbers. Ordinarily, integer solutions are sought. However the answer to the decision problem is the same in the two cases and it is more convenient for us to consider only natural number solutions. Indeed, $P(x_1, \cdots, x_k) = 0$ has a solution in integers if and only if one of the equations $P(\pm x_1, \cdots, \pm x_k) = 0$ given by a particular choice of signs has a solution in natural numbers. Hence if Q is the polynomial obtained by multiplying together all the 2^k polynomials $P(\pm x_1, \cdots, \pm x_k)$ obtained by different choices of signs, then $P(x_1, \cdots, x_k) = 0$ has a solution in integers if and only if $Q(x_1, \cdots, x_k) = 0$ has a solution in natural numbers. On the other hand, in view of Lagrange's theorem, $P(x_1, \cdots, x_k) = 0$ has a solution in natural numbers if and only if $P(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + z_1^2, \cdots, u_k^2 + v_k^2 + w_k^2 + z_k^2) = 0$ has a solution in integers.