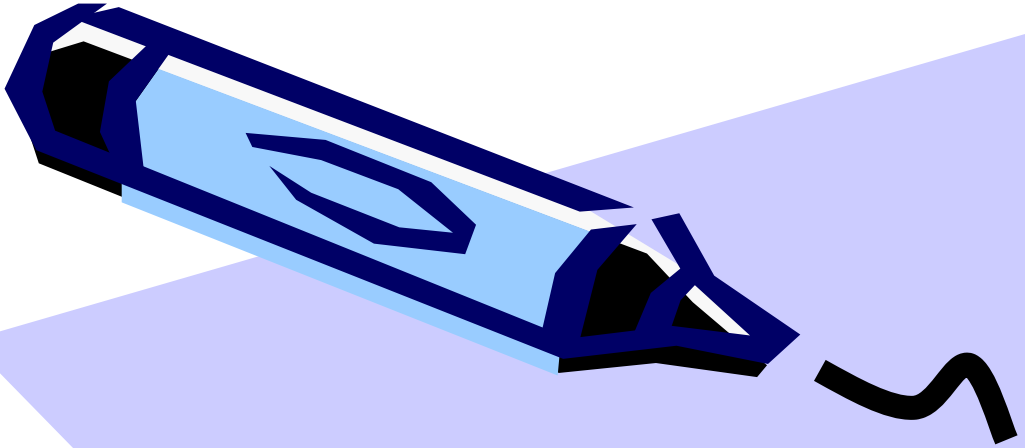
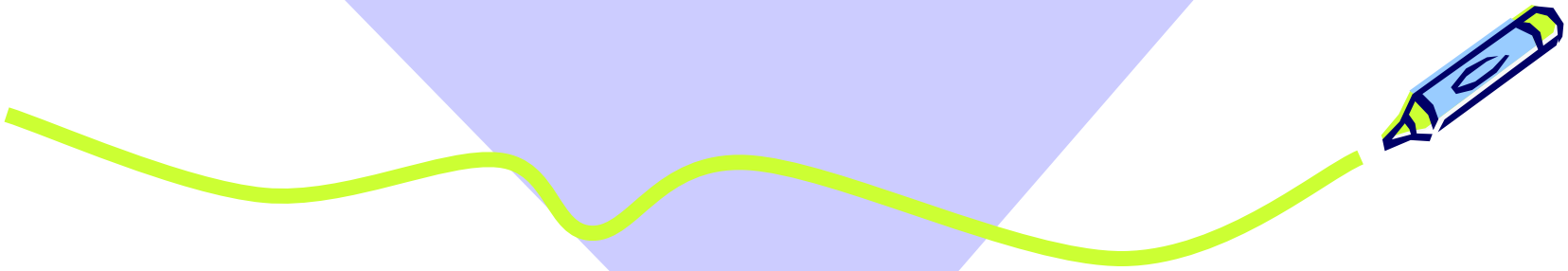


Generazione di numeri random

Distribuzioni uniformi



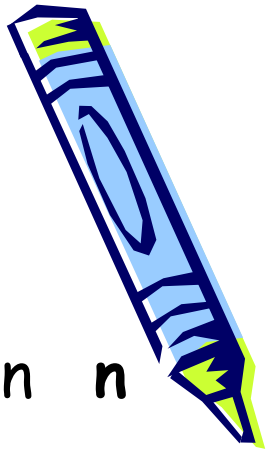
I numeri random

Per **numero random** (o numero casuale) si intende una variabile aleatoria distribuita in modo **uniforme tra 0 e 1**.

Le proprietà statistiche che una sequenza di numeri random deve possedere sono:

- uniformità
- indipendenza

I numeri random



Si supponga di dividere l'intervallo [0,1] in **n** sottointervalli di uguale ampiezza.

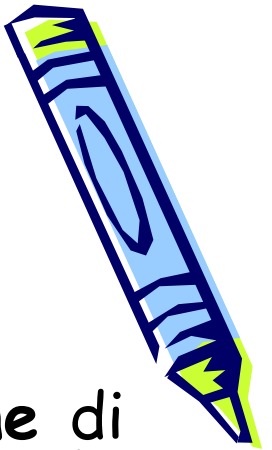
Conseguenza della proprietà di uniformità è:

- Se si eseguono **N** osservazioni di un numero casuale, il numero di osservazioni in ogni sottointervallo è pari a **N/n**.

Conseguenza della proprietà di indipendenza è:

- la probabilità di ottenere un valore in un particolare intervallo è indipendente dai valori precedentemente ottenuti.

Generazione di numeri random

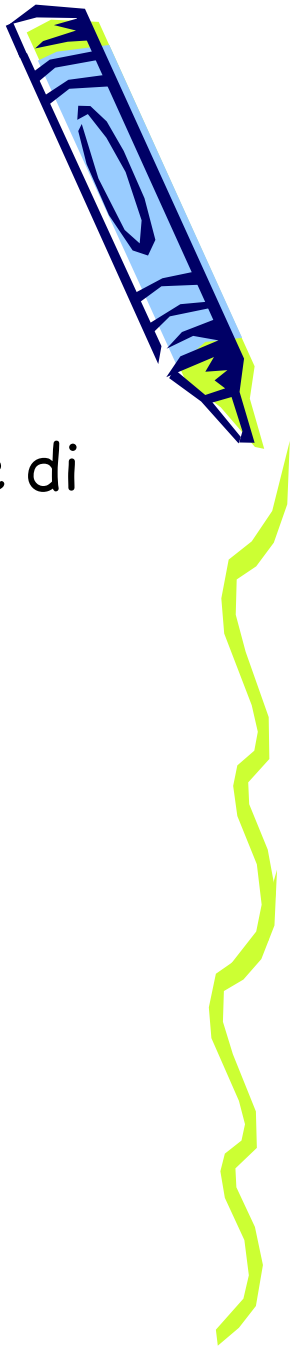


I numeri generati da una **routine di generazione** di numeri casuali, sono, in realtà numeri *pseudo-casuali.*

Una routine di generazione di numeri casuali deve:

- essere veloce
- avere un ciclo (periodo) sufficientemente lungo
- non presentare larghi gap (intervalli tra due numeri generati)
- essere replicabile
- generare numeri con proprietà statistiche più vicine possibile a quelle ideali.

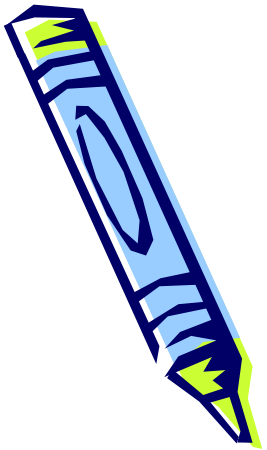
Generazione di numeri random



I difetti più comuni di una routine di generazione di numeri casuali sono:

- numeri non uniformemente distribuiti
- discretizzazione dei numeri generati
- media o varianza non corrette
- presenza di variazioni cicliche.

Tecnica di congruenza lineare (Lehmer, 1951)

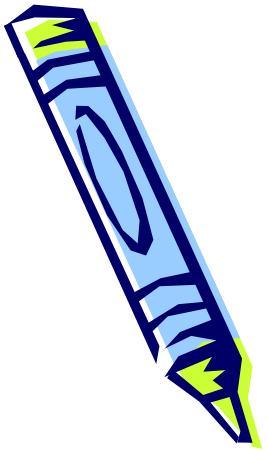


Uno dei metodi più utilizzati per la generazione di numeri casuali è la **Tecnica di congruenza lineare** (***Linear Congruential Method***).

•La relazione ricorsiva alla base di tale tecnica è:

$$x_{k+1} = (ax_k + c) \bmod m$$

Tecnica di congruenza lineare



dove:

- a → moltiplicatore
- c → incremento
- m → modulo
- x_0 → valore iniziale detto *seme*

a, c, m e x_0 sono numeri interi non negativi

l'operazione **mod** rappresenta il resto della divisione.

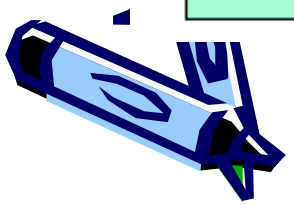
Ogni singola istanza di numero casuale è ottenuta come $u_k = x_k / m$

Tecnica di congruenza lineare

La tecnica di congruenza lineare presenta le seguenti caratteristiche:

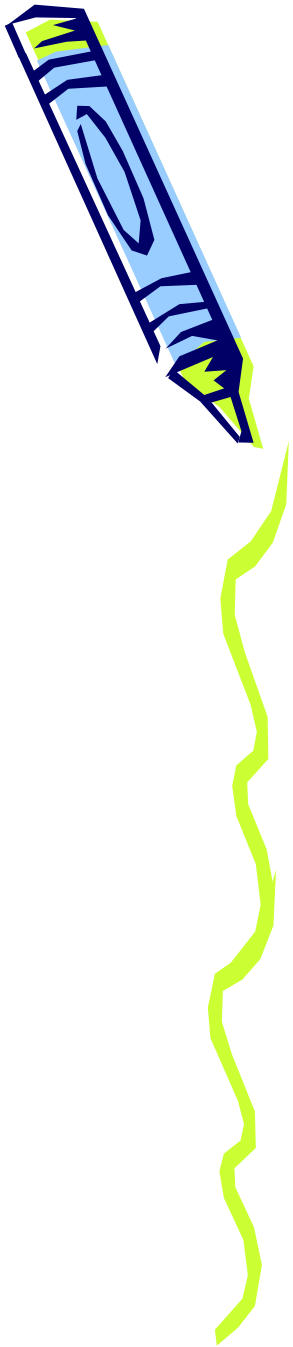
- ☹ è ciclica (con periodo circa pari a m)
- ☹ i numeri generati sono discretizzati, infatti u_k può assumere solo i valori $0, 1/m, 2/m, \ldots, (m-1)/m$ (in realtà u_k potrebbe assumere ogni valore nell'intervallo, ad esempio, [0.5/m, 0.6/m], con probabilità 0.1/m, ma la probabilità che questo avvenga è 0).

N.B. Per utilizzare in maniera efficace la tecnica di congruenza lineare è necessario scegliere **valori molto grandi di *m***

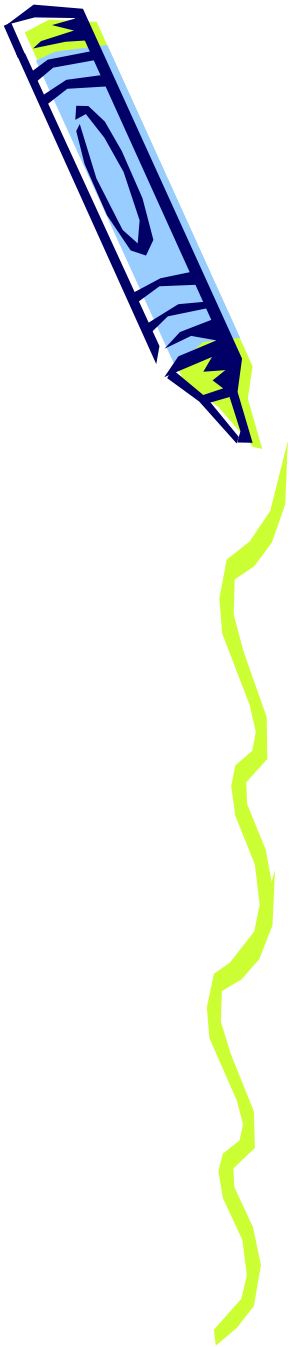


Esempio

$a = 1, c = 5, m = 4, x_0 = 2$



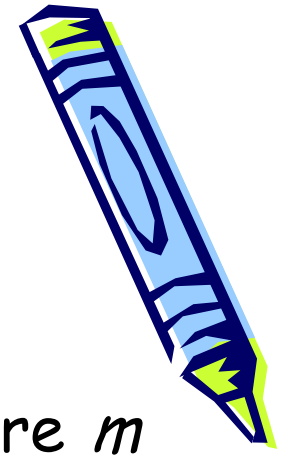
Esempio



$a = 1, c = 5, m = 4, x_0 = 2$

x1 = 3
x2 = 0
x3 = 1
x4 = 2
x5 = 3

Distribuzione Uniforme



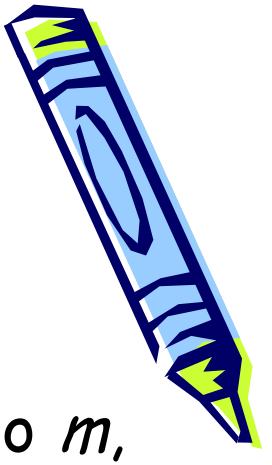
E' facile verificare che al più si possono generare *m* numeri interi *Xn* distinti nell'intervallo [0, *m* – 1].

In particolare se *c* = 0, il generatore viene detto *moltiplicativo*.

Una sequenza di numeri uniformante distribuita tra [0,1] può essere ottenuta nel seguente modo:

$$U = \frac{X_n}{m}$$

Distribuzione Uniforme



La sequenza ottenuta è periodica al più di periodo *m*, in particolare si dice che ha periodo pieno se il suo periodo è proprio *m*, e ciò si verifica quando sono verificate le seguenti condizioni:

- Se *m* e c sono primi tra loro;
- Se *m* è divisibile per un numero primo *b*, per il quale deve essere divisibile anche *a* – 1;
- Se *m* è divisibile per 4, allora anche *a* – 1 deve essere divisibile per 4.

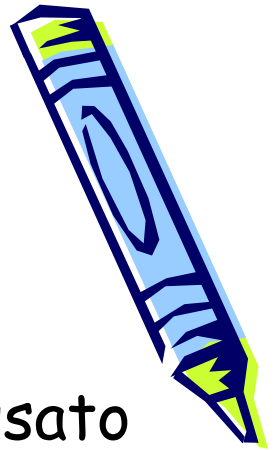
Osservazioni

Scegliendo un valore di *m* abbastanza grande si può ridurre sia il fenomeno della periodicità sia il fatto di generare numeri razionali.

Inoltre non è necessario ai fini della simulazione che vengano generati tutti i numeri tra [0,1], anche perché questi sono infiniti, ma è sufficiente che quanti più numeri possibili all'interno dell'intervallo abbiamo la stessa probabilità di essere generati.

Generalmente un valore di m è ($m \geq 10^9$) in modo che i numeri generati Ui costituiscono un sottoinsieme denso dell'intervallo [0, 1).

Esempi di generatori

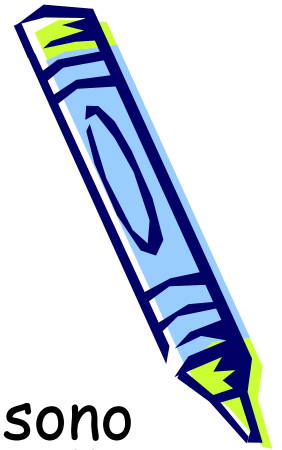


Un esempio di generatore moltiplicativo molto usato nei calcolatori a 32 bit è:

- (c = 0, a = 75, m = 2^{31} - 1) noto anche come generatore di Learmouth - Lewis.

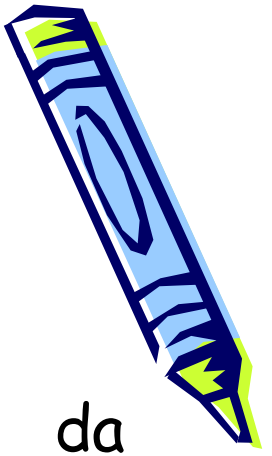
- un esempio di generatore non puramente moltiplicativo è (c = 453806245, a = 314159269 m = 2^{15}).

Osservazioni



Il confronto tra i diversi generatori che possono essere utilizzati va effettuato, sull'analisi della *periodicità*, la bontà dell'*uniformità* dei numeri generati e la *semplicità computazionale*, perché la generazioni di numeri troppo grandi può portare ad un impiego oneroso delle risorse del calcolatore, inoltre se i numeri *Xn* diventano troppo grandi, vengono troncati, e questo può causare una perdita delle statistiche di uniformità desiderate.

Generatori additivi



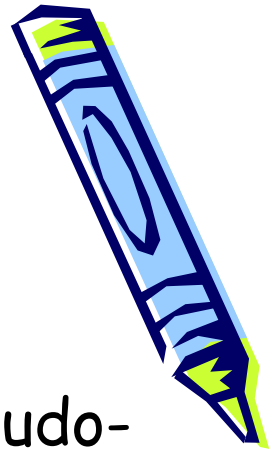
Esistono anche *generatori* più semplici da implementare, che però forniscono prestazioni inferiori.

E' il caso dei *generatori* puramente *additivi* basati sulla serie di Fibonacci:

$Xn = (X_{n-1} + X_{n-2})$ mod (m)

Un esempio è il generatore con $X1 = X0 = 1$, e $m = 2^{32}$

Test di uniformità

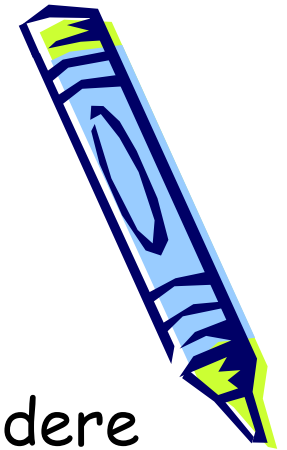


Dopo aver generato la sequenza numerica pseudo-casuale, occorre verificare la bontà della sequenza ottenuta.

Chiaramente si tratta di verificare se la sequenza ottenuta (che costituisce un campione casuale dell' esperimento) segue una distribuzione uniforme.

Per effettuare questa verifica è possibile utilizzare il test del $\chi 2$

Test di uniformità



La prima operazione da effettuare è dividere l'intervallo [0,1] in s sottointervalli della stessa lunghezza. Successivamente si contano quanti numeri della sequenza cadono nell'i-esimo intervallino:

$$R_i = \left| \left\{ x_j \middle| x_j \in s_i, j = 1 \ldots N \right\} \right|$$

Test di uniformità

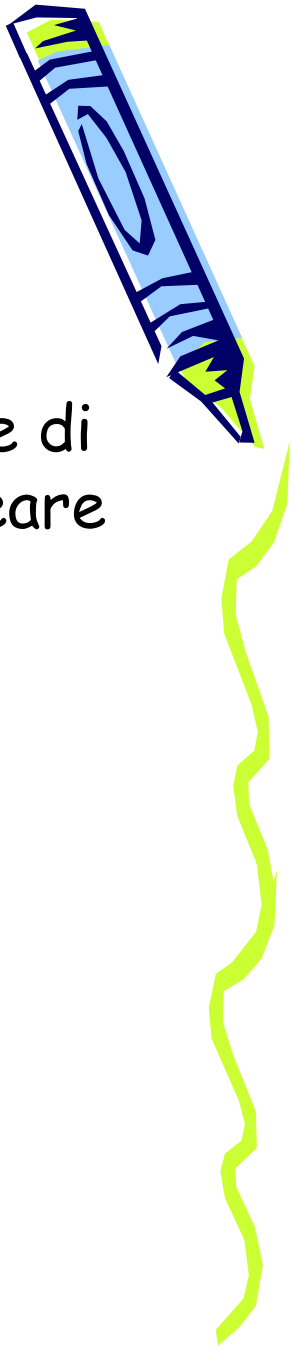
I valori *Ri* dovrebbero essere quanto più prossimi al valore *N/s*.

Infatti se la sequenza fosse perfettamente uniforme in ogni sottointervallo cadrebbero lo stesso numero di campioni della sequenza.

La variabile *V* per eseguire il test si calcola semplicemente:

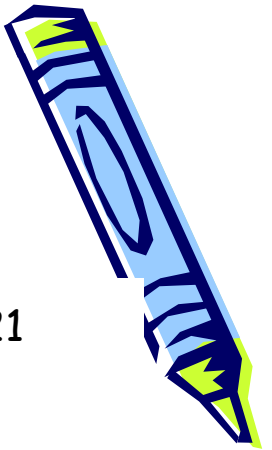
$$V = \sum_{i=1}^{S} \frac{(R_i - N/s)^2}{N/s}$$

Esempio

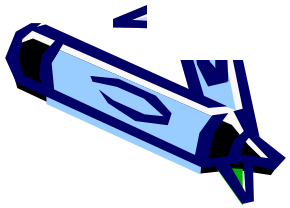


Generiamo una sequenza numerica pseudo-casuale di 100 valori mediante il generatore congruente lineare ($c = 0$, $a = 75$, $m = 2^{31} - 1$):

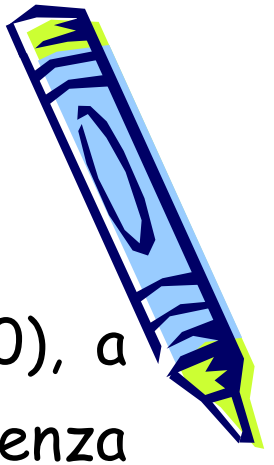
Esempio



0.0001	0.0071	0.0119	0.0452	0.0465	0.0632	0.077	0.0921
0.0927	0.0954	0.1032	0.1208	0.1327	0.1382	0.1539	0.16
0.1629	0.1629	0.1749	0.1896	0.1942	0.2266	0.2541	0.2693
0.2782	0.2823	0.2954	0.297	0.2975	0.3044	0.3097	0.3154
0.3163	0.3264	0.3277	0.3319	0.3457	0.3469	0.3608	0.3622
0.3641	0.3641	0.3777	0.3777	0.4098	0.4151	0.4598	0.4617
0.4704	0.4704	0.4746	0.5008	0.5102	0.5152	0.5336	0.5346
0.5392	0.5561	0.5641	0.5865	0.5926	0.5926	0.6056	0.6151
0.622	0.6245	0.6445	0.6534	0.6649	0.6649	0.6651	0.6651
0.6684	0.6825	0.6932	0.702	0.7115	0.7269	0.7271	0.7491
0.7491	0.7708	0.7773	0.7773	0.7886	0.793	0.8255	0.8342
0.835	0.8414	0.8471	0.8652	0.8677	0.8857	0.8898	0.9104
0.9111	0.9196	0.9766	0.9946				



Esempio



Suddividiamo l'intervallo [0,1] in 20 parti (s = 20), a questo punto contiamo quanti valori della sequenza cadono in ogni intervallino di ampiezza 0.05

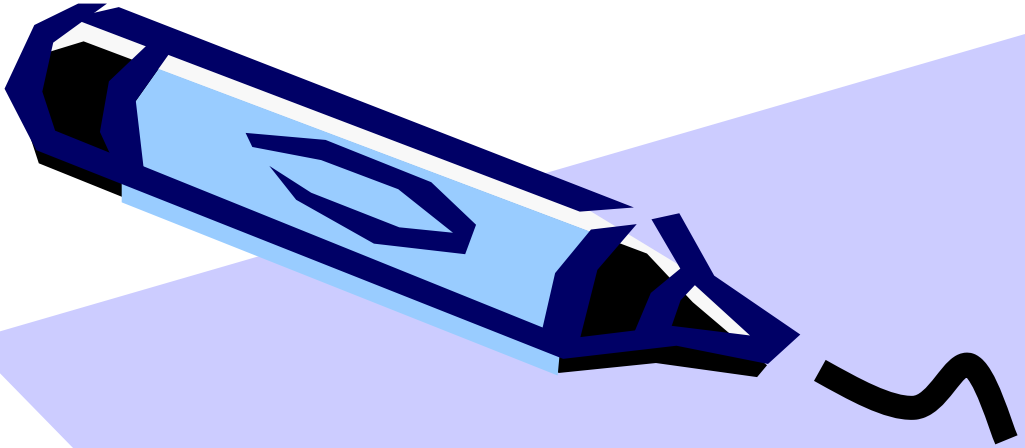
R =[5,3,4,8,1,8,9,4,2,6,6,4,5,7,5,5,4,7,5,2];

$$V = \sum_{i=1}^{S} \frac{(R_i - N/s)^2}{N/s} = \sum_{i=1}^{20} \frac{(R_i - 5)^2}{5} = 17{,}2$$

γ = 0.01, (χ^2 con 19 gradi di libertà)

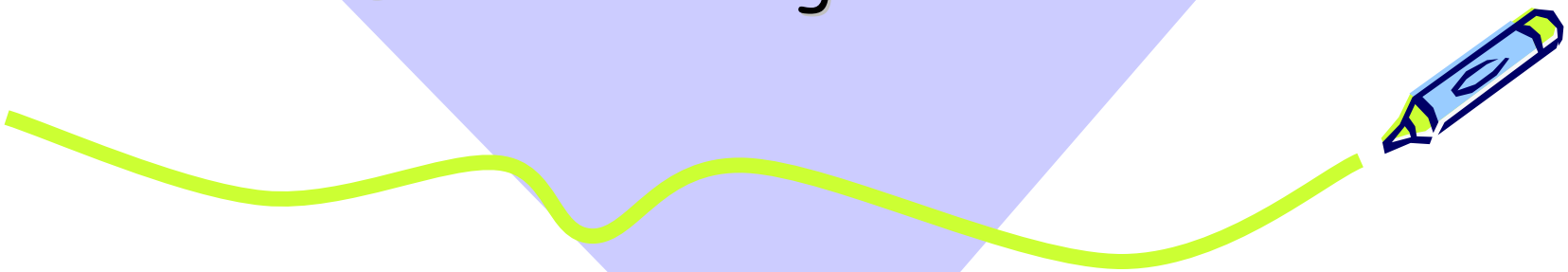
$x\gamma$ = 36,19.

la statistica del test V è minore di *possiamo accettare l'ipotesi di uniformità della sequenza generata.*

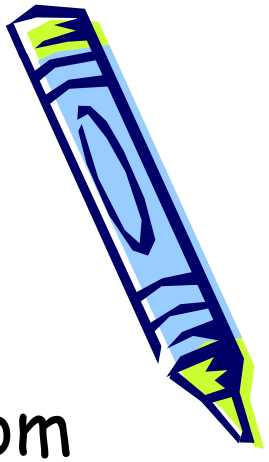


Generazione di numeri random

Distribuzioni generiche



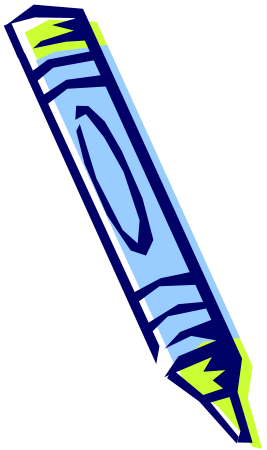
Generazione distribuzione generica



A partire da una sequenza di numeri random (U(0,1)) opportunamente generati, i metodi per la generazione di variabili aleatorie con distribuzione generica, sono:

- tecnica di **trasformazione inversa**
- metodo di **accettazione/rifiuto**
- metodo di **composizione**

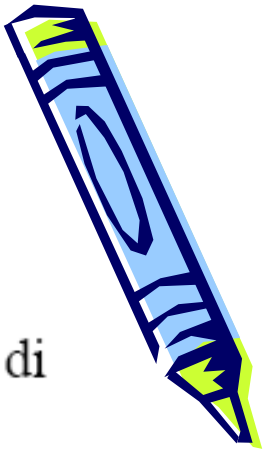
Generazione distribuzione generica



Una routine di generazione di variabili aleatorie deve:

- essere veloce
- avere un ciclo sufficientemente lungo
- non presentare larghi gap
- essere replicabile
- generare numeri con proprietà statistiche più vicine possibile a quelle ideali
- utilizzare poche volte la routine di generazione di numeri random

Trasformazione Inversa



Si vuole generare una variabile aleatoria X con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$.

1) si calcola la funzione di distribuzione di probabilità o funzione cumulativa di probabilità

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(\tau) d\tau$$

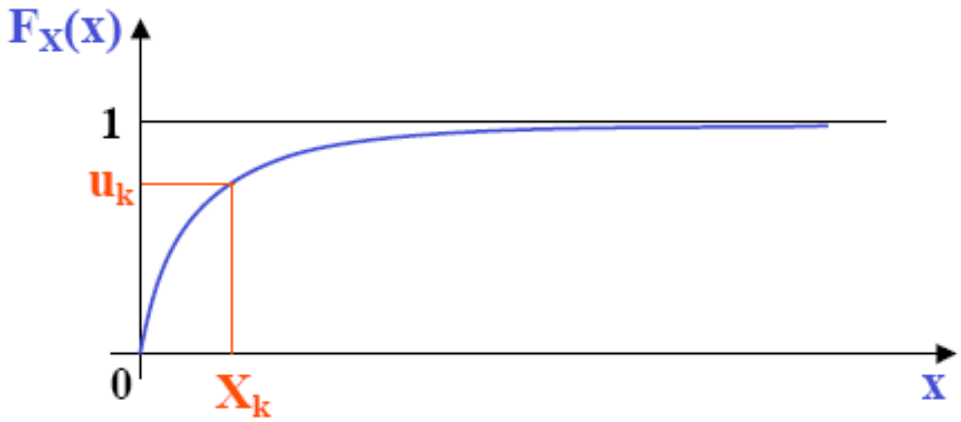
Tale funzione (qualora sia possibile calcolarla in forma chiusa) è continua, monotona crescente ed è sempre compresa tra 0 e 1 (per definizione $F_X(x) = P[X \leq x]$).

Trasformazione Inversa

2) si pone u= $F_X(x)$ con u numero random (u ~ U(0,1))

3) si risolve X= $F_X^{-1}(u)$ e la variabile aleatoria X è distribuita secondo $f_X(x)$ (X ~ $f_X(x)$).

Graficamente:



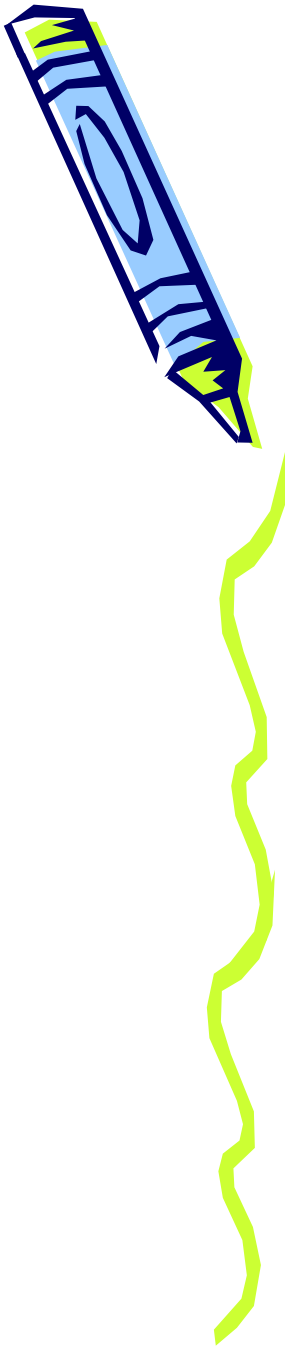
Esempio

Per applicare quanto detto, vediamo come è possibile ottenere una v.a. esponenziale partendo da una v.a. uniforme U:

Supponiamo di voler costruire una successione di numeri pseudocasuali come osservazioni dalla distribuzione esponenziale ovvero con funzione di distribuzione

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$$

Esempio



Determiniamo F^{-1}:

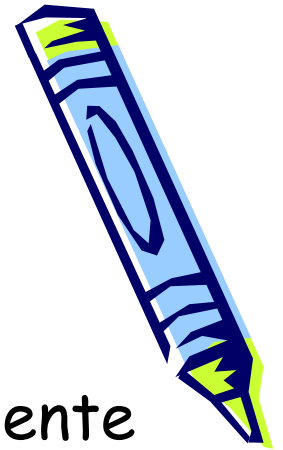
da $u = F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ si ricava $1 - u = e^{-\lambda x}$

$\ln (1 - u) = \ln (e^{-\lambda x})$ quindi $x = - \ln (1 - u)/\lambda$

ovvero

$$F^{-1}(u) = - \ln (1 - u)/\lambda$$

Esempio



Quindi se U è una variabile aleatoria uniformemente distribuita in [0, 1),

$$X = F^{-1}(U) = - \ln (1 - u)/\lambda$$

è una variabile aleatoria con distribuzione esponenziale con media $1/\lambda$

Quindi, data una successione di numeri pseudocasuali con distribuzione uniforme in [0, 1), possiamo ottenere una successione di numeri pseudocasuali con distribuzione esponenziale.

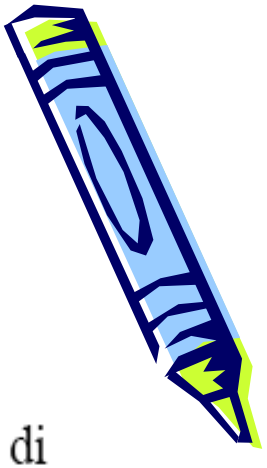
Trasformazione Inversa

Se una variabile aleatoria U ha distribuzione uniforme in [0, 1), anche 1 – U ha distribuzione uniforme in [0, 1)

e quindi si può sostituire nell'argomento del logaritmo (1 – U) con U.

Tuttavia, questo cambiamento potrebbe indurre un cambiamento nella correlazione delle variabili X generate.

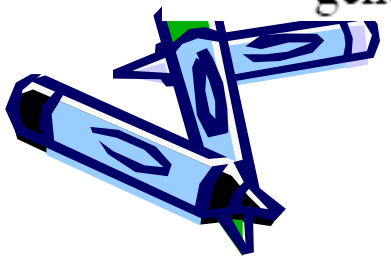
Trasformazione Inversa



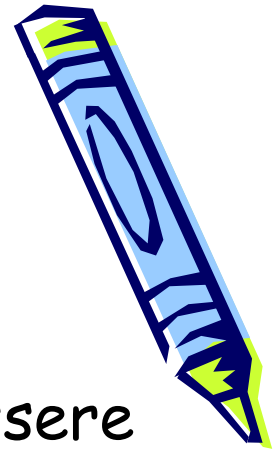
Osservazioni

La routine di generazione di una variabile aleatoria X con funzione di densità di probabilità esponenziale:

- chiama una sola volta, per ogni istanza di X, la routine (RAND) di generazione di numeri random;
- ha lo stesso ciclo di RAND;
- ha gap crescenti per X crescenti;
- è replicabile se lo è RAND;
- genererebbe numeri con proprietà statistiche ideali se RAND generasse numeri random ideali.



Trasformazione Inversa



Il metodo della trasformazione inversa può essere esteso ed utilizzato anche nel caso di distribuzioni discrete, ovvero quando si assume che la variabile X sia una variabile aleatoria discreta.

Supponiamo quindi che X assuma i valori x1, x2, . . . e supponiamo che essi siano ordinati, ovvero $x1 < x2 <\ldots$

Data una variabile U uniformemente distribuita in [0, 1) si definisce la variabile X nel seguente modo:

$$X(U) = \max \{xi \mid U \in [F(xi-1), F(xi)]\}$$

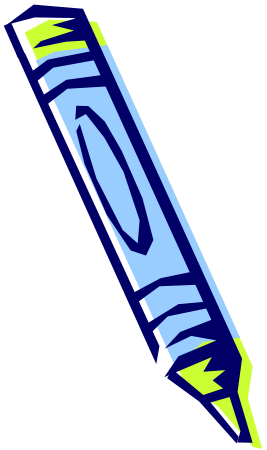
Trasformazione Inversa

ovvero si determina il più piccolo intero positivo $\underline{K}$ tale che $U \leq F(x_{\underline{k}})$ e si pone

$X = x_{\underline{k}}$.

Dobbiamo ora dimostrare che effettivamente la X così generata è quella desiderata, ovvero che risulta $P(X = xi) = p(x_i)$ per ogni i.

Trasformazione Inversa



Infatti si ha:

•per i = 1 risulta $X = x_1$ se e solo se $U \leq F(x1)$,
ma $F(x1) = p(x1)$ perché le xi sono ordinate.

Ora, poiché la U è uniformemente distribuita in [0, 1), si ha $P(X = x1) = P(U \leq F(x1)) = F(x1) = p(x1)$

• per $i \geq 2$ risulta $X = xi$ se e solo se $F(xi-1) < U \leq F(xi)$ per come scelto i.

Inoltre, pochè la U è uniformemente distribuita in [0, 1) si ha

$$P(X = xi) = P(F(xi-1) < U \leq F(xi)) = F(xi) - F(xi-1) = p(xi)$$

Trasformazione Inversa

Il metodo della trasformazione inversa nel caso discreto ha una giustificazione molto intuitiva: si divide l'intervallo [0, 1) in sottointervalli contigui di ampiezza p(x1), p(x2), . . . e si assegna X a seconda del fatto che questi intervalli contengano la U che è stata generata

Metodo dell'accettazione -reiezione

Il metodo della trasformazione inversa è basato sul calcolo della trasformazione inversa F^{-1} che non sempre può essere calcolata o comunque non in maniera efficiente.

Per questa ragione sono stati sviluppati altri metodi fra i quali il metodo che esaminiamo in questo paragrafo detto "acceptance-rejection" o anche "metodo del rigetto".

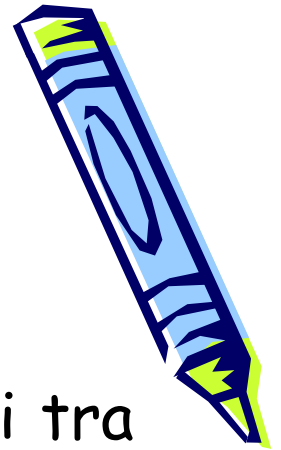
Metodo dell'accettazione -reiezione

Nel caso di leggi distribuzioni definite su intervalli finiti [*a,b*] si utilizza *il metodo della reiezione-accettazione*.

Supponiamo di conoscere la densità di probabilità della v.a. *X* che intendiamo generare: $f_X(x)$, definita su un intervallo finito [*a,b*], e l' immagine è definita sul codominio [0,*c*].

In pratica la funzione $f_X(x)$ è tutta contenuta all'interno del rettangolo [*a,b*]x[0,*c*].

Metodo dell'accettazione -reiezione



Generiamo due sequenze pseudo-casuali uniformi tra [0,1] : *U1* e *U2*.

Successivamente deriviamo, altre due sequenze numeriche uniformi secondo la seguente regola

$$\begin{cases} X = a + (b-a)U_1 \\ Y = cU_2 \end{cases}$$

ad ogni coppia di valori (*u1,u2*) corrisponderà una coppia (*x,y*) appartenente al rettangolo [*a,b*]x[0,*c*].

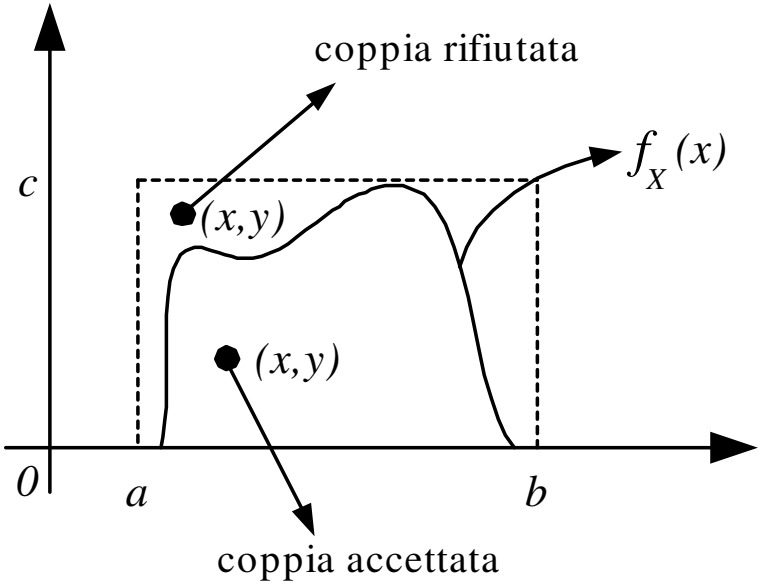
Metodo dell'accettazione -reiezione

Se la coppia (x,y) cade all'interno dell'area della funzione $f_X(x)$ viene accettata e sarà successivamente utilizzata per creare la sequenza pseudo-casuale desiderata, altrimenti viene scartata. In questo ultimo caso la procedura viene ripetuta fino a trovare una nuova coppia contenuta nell'area di $f_X(x)$.

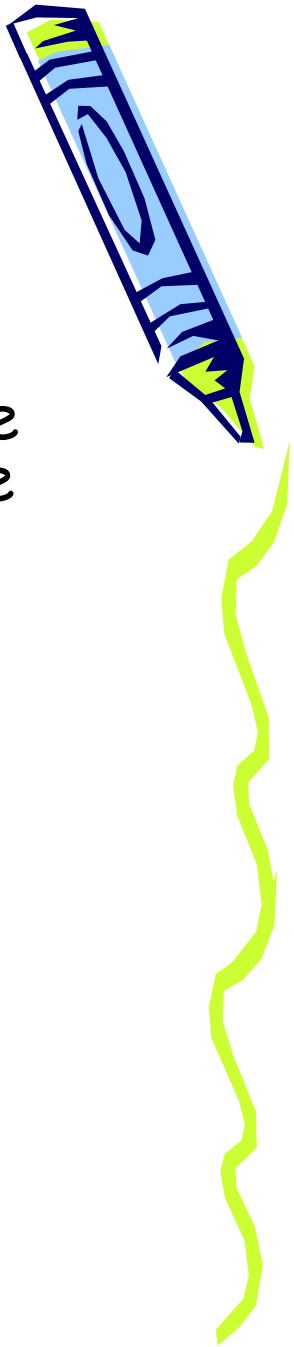
La sequenza di valori X così ottenuta è una sequenza pseudo-casuale che segue la legge di distribuzione $f_X(x)$, (infatti abbiamo scelto solo valori che cadono nella sua area).

Metodo dell'accettazione -reiezione

Questo metodo è molto efficiente quando l'area di $f_X(x)$, copre quasi tutto il rettangolo $[a,b]x[0,c]$, (in questo caso il numero di coppie scartato è molto esiguo).



Esercizio



Applichiamo il metodo dell'accettazione-reiezione per generare osservazioni casuali da una variabile aleatoria avente densità di probabilità

$f(x) = 20x(1-x)^3,\ 0 < x < 1$

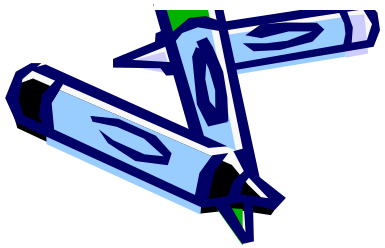
Metodo accettazione-reiezione

Si vuole generare una variabile aleatoria X con funzione di densità di probabilità $f_X(x)$ su un intervallo [a,b].

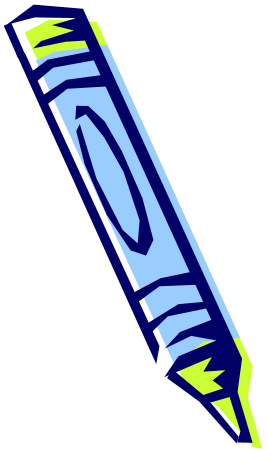
Algoritmo accettazione-rifiuto:

1) si genera un'istanza di una variabile R distribuita in modo uniforme nell'intervallo [a,b] (U(a,b))

2) si accetta tale valore con probabilità pari a $f_X(R)/ \max f_X(x)$, lo si rifiuta con probabilità $1- f_X(R)/\max f_X(x)$.



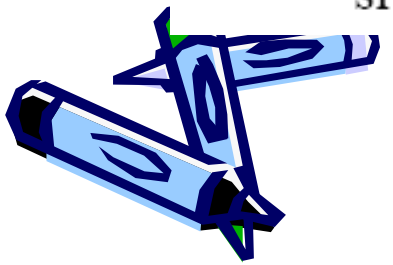
Metodo accettazione-reiezione



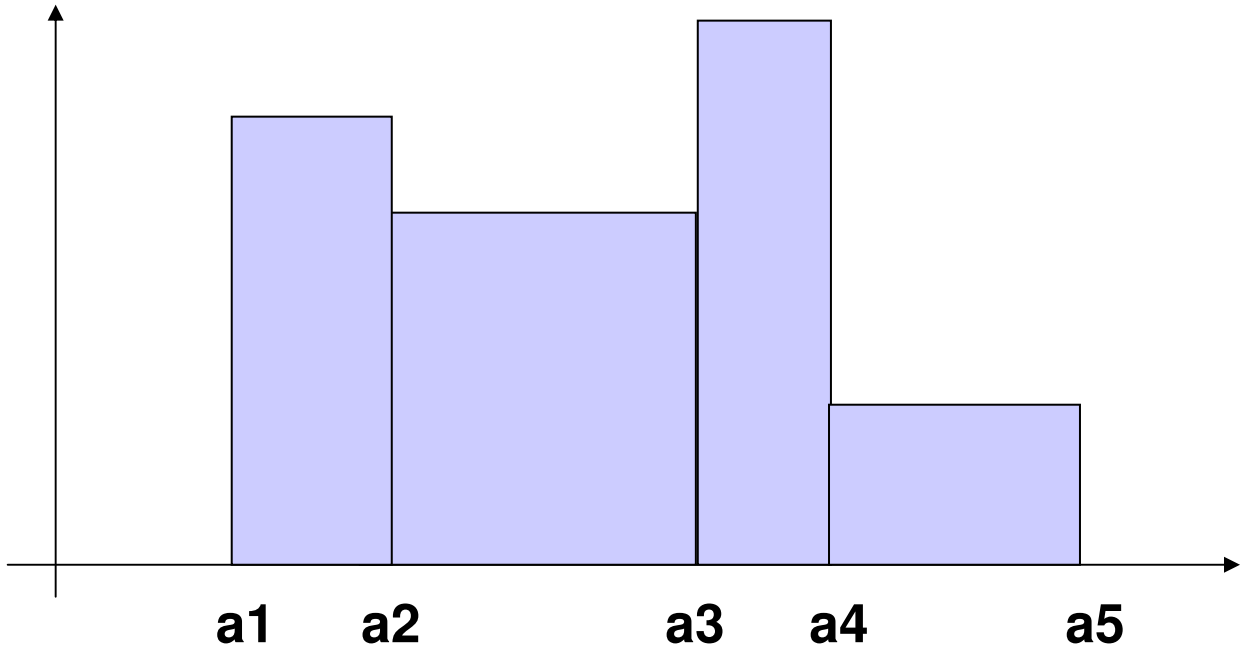
Osservazioni

La routine di generazione di una variabile aleatoria X con il metodo di accettazione-rifiuto:

- chiama almeno due volte, per ogni istanza di X, la routine RAND di generazione di numeri random; una volta per generare le variabile R, una volta per decidere se accettare o rifiutare il valore (esistono, però, metodi più specializzati e più efficienti);
- ha ciclo e gap che dipendono da RAND*RAND;
- è replicabile se lo è RAND;
- si utilizza solo in assenza di altri metodi.

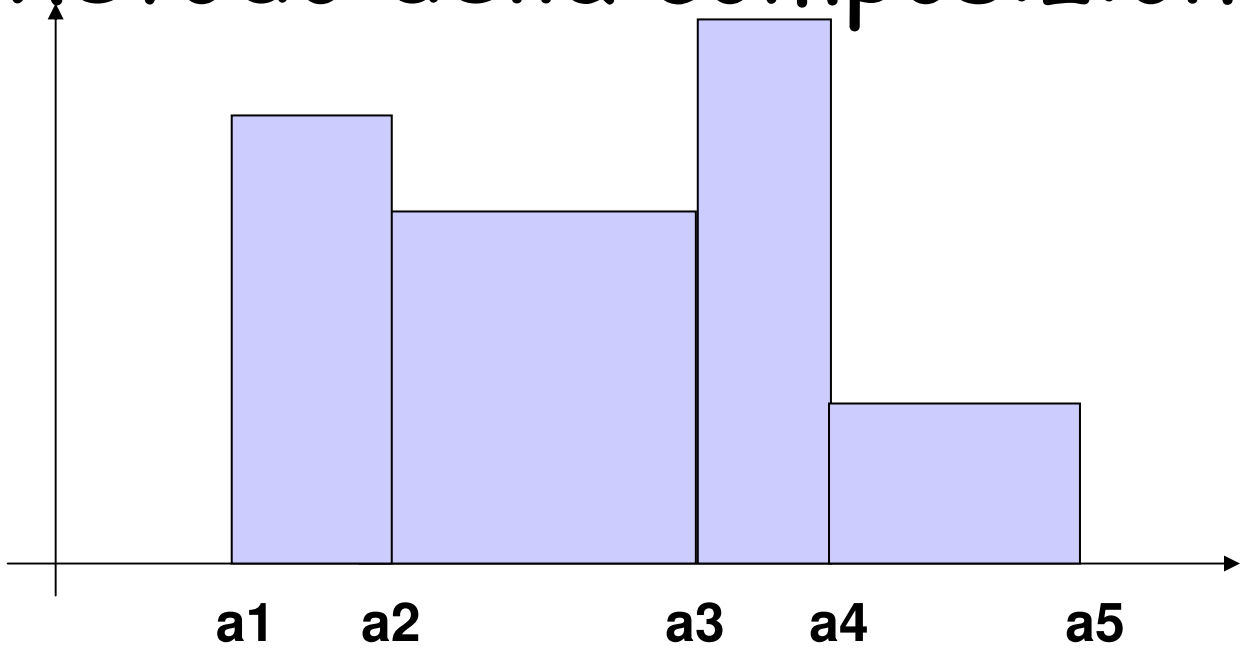


Metodo della composizione



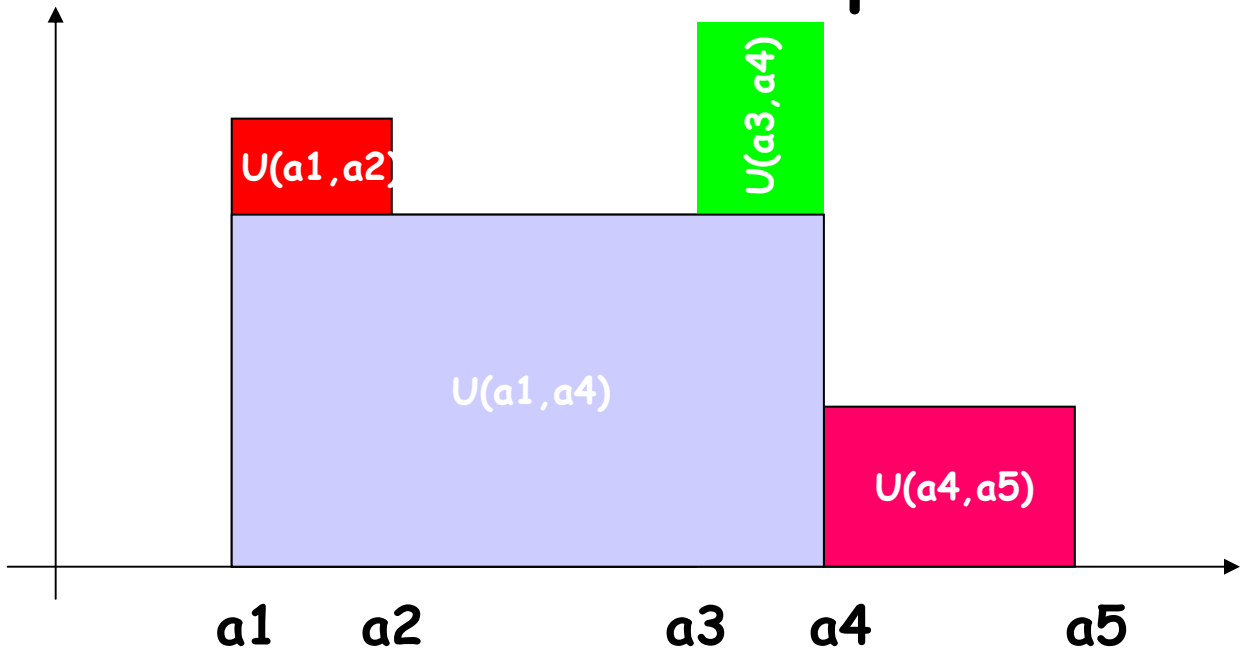
Questa distribuzione può essere vista come risultato della composizione di 4 uniformi: U(a1,a2), U(a2,a3), U(a3,a4), U(a4,a5).

Metodo della composizione



Siano p1, p2, p3 e p4 le aree dei quattro rettangoli: per generare un valore tratto da questa distribuzione scegliamo un rettangolo utilizzando le pi, poi generiamo un numero uniformemente distribuito in U(ai, ai+1)

Metodo della composizione



Sono possibili anche scomposizioni alternative: in questo caso la distribuizione di prima viene scomposta in 4 uniformi,
U(a1,a2), U(a1,a4), U(a3,a4), U(a4,a5), ciascuna con probabilità uguale all'area del rettangolo corrispondente.