

**ANALISI COMPLESSA  
SECONDO FOGLIO 2019**

- (1) Calcolare i seguenti integrali:

$$\int_{|z-i|=1} \frac{dz}{1+z^2}, \quad \int_{|z|=1} \frac{\text{Log}(9+z^3)}{z} dz.$$

- (2) Sia  $\Omega \subset \mathbb{C}$  un aperto connesso, e sia  $f \in H(\Omega)$ . Sia  $l = \{z = x + iy \mid ax + by + c = 0\}$  una retta del piano, ove  $a, b, c \in \mathbb{R}$  e si suppone  $a^2 + b^2 > 0$ . provare che se  $f(\Omega) \subset l$  allora  $f$  è costante.
- (3) Sia  $f \in H(\mathbb{C})$  tale che esistono  $\alpha, M \in \mathbb{R}$ ,  $M > 0$ , tali che  $|f(z)| \leq M|z|^\alpha$  per ogni  $z$  t.c.  $|z| \geq 1$ . provare che  $f \equiv 0$  se  $\alpha < 0$  e che  $f$  è un polinomio in  $z$  di grado  $N \leq \alpha$  se  $\alpha \geq 0$ .
- (4) Sia  $f \in H(\mathbb{C})$  non costante. Provare che per ogni  $w \in \mathbb{C}$  esiste una successione  $\{z_n\} \subset \mathbb{C}$  t.c.  $f(z_n) \rightarrow w$  per  $n \rightarrow \infty$ .  
Sugg.: Considerare la funzione  $\frac{1}{f(z)-w}$ .