CAPITOLO 2 CATEGORIE

1 Categorie e funtori

NOTA Questa sezione è un intermezzo formale. La teoria delle categorie si è dimostrata un potente linguaggio per esprimere alcuni fatti e costruzioni generali che si incontrano in particolare in topologia algebrica (ma anche in altre branche dell'algebra e della geometria). Qui ne diamo una introduzione elementare limitandoci alle definizioni ed esempi piú semplici. Suggeriamo però al lettore di passare velocemente su queste idee tornandoci quando le utilizzeremo in casi concreti. In particolare alcuni degli esempi che citiamo verranno illustrati solo nei paragrafi successivi.

CATEGORIE

1.1 DEFINIZIONE. *Una categoria $\mathcal{C}$ consiste dei seguenti dati:*

(1) *Una classe $ob(\mathcal{C})$ i cui elementi vengono chiamati* **oggetti** *della categoria.*

(2) *Per ogni coppia $A, B \in ob(\mathcal{C})$ di oggetti, un insieme indicato con $\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ o con $\mathcal{C}(A, B)$, detto insieme dei morfismi da A a B.*
Invece di scrivere $f \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B)$ si usa porre $f : A \to B$.

(3) *Per ogni terna di oggetti A, B, C una composizione*

$$\mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, B) \times \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(B, C) \to \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, C)$$

(4) *Per ogni oggetto A un elemento speciale $1_A \in \mathrm{HOM}_{\mathcal{C}}(A, A)$ detto* **identità**.

Si suppone inoltre che valgano i seguenti assiomi.

a) La composizione è associativa.

b) L'identità agisce come elemento neutro per la composizione (quando è definita).

Le categorie che sono più note (ma ne incontreremo anche altre) sono quelle in cui possiamo interpretare i morfismi come particolari funzioni fra insiemi, la loro composizione è la usuale composizione di funzioni, la identità l'usuale identità.

In particolare abbiamo:

(1) La categoria degli insiemi indicata con il simbolo *Sets* in cui i morfismi sono funzioni arbitrarie $Sets(A, B) := B^A$.
(2) I gruppi e gli omomorfismi fra gruppi, ovvero gli anelli, oppure i moduli su un anello con i relativi omomorfismi ecc.
(3) Gli insiemi su cui opera un gruppo G fissato ed i G morfismi (§3).
(4) Gli spazi topologici con morfismi le funzioni continue.
(5) I rivestimenti di uno spazio dato ed i morfismi di rivestimenti (Cap. 3).
(6) I complessi simpliciali con i morfismi simpliciali (Cap. 4).

Un primo esempio di categoria in cui i morfismi non possono essere pensati come semplici funzioni è la *Categoria omotopica*, i cui oggetti sono spazi topologici ed i morfismi sono classi di omotopia di funzioni continue (Cap. 4).

Un esempio semplice da visualizzare è quello di *poset* (abbreviati come *Posets*[1]).

Ricordiamo che un insieme parzialmente ordinato è un insieme con una relazione binaria detta ordinamento ed indicata con $a \leq b$ che verifica le proprietà, transitiva $a \leq b \leq c \implies a \leq c$ riflessiva $a \leq a$, ed antisimmetrica $a \leq b \leq a \implies a = b$.

Fra tali insiemi possiamo prendere come morfismi le *funzioni non decrescenti* definite da $a \leq b \implies f(a) \leq f(b)$ e farne una categoria.

Si ricordi inoltre che un *poset* si dice *totalmente ordinato* se dati due sue elementi a, b o $a \leq b$ ovvero $b \leq a$.

Un insieme parzialmente ordinato si pensa come categoria i cui oggetti sono gli elementi del poset, i morfismi le coppie $a < b$.

Nel caso finito si visualizza come punti nel piano e segmenti orientati per ogni coppia $a < b$ di elementi adiacenti, cioè tali che non esista alcun c con $a < c < b$, un morfismo fra due elemnti è quindi semplicemente un *cammino* lungo il grafico disegnato nel verso delle frecce:

Figura 1

[1] partially ordered sets

Funtori Una delle idee potenti della teoria delle categorie è quella di trattare in un certo senso (che però richiede qualche cautela logica) le categorie come oggetti di una nuova categoria *La categoria delle categorie*!!

Per fare questo occorre definire i morfismi fra categorie, cioè i *funtori.*

1.2 Definizione. *Un funtore (covariante) $F : \mathcal{A}, \mathcal{B}$ dalla categoria $\mathcal{A}$ a valori nella categoria $\mathcal{B}$ è una legge che associa ad ogni oggetto X di $\mathcal{A}$ un oggetto $F(X)$ di $\mathcal{B}$ ed ad ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{A}$ un morfismo $F(f) : F(X) \to F(Y)$ (in $\mathcal{B}$) in modo tale che*

a) $F(f \circ g) = F(f) \circ F(g)$ (quando la composizione è definita).

b) $F(1_X) = 1_{F(X)}$.

È chiaro che si può fare la composizione di funtori come nel caso delle funzioni.

Si possono definire anche i funtori **contravarianti** imponendo che ad ogni morfismo $f : X \to Y$ sia associato un morfismo $F(f) : F(Y) \to F(X)$ in modo tale che si abbia $F(f \circ g) = F(g) \circ F(f)$.

Come si fa in teoria dei gruppi e degli anelli si può definire la **categoria opposta** $\mathcal{C}^0$ di una categoria data $\mathcal{C}$, i cui oggetti sono gli stessi di quelli di $\mathcal{C}$ mentre $\mathrm{Hom}^0_{\mathcal{C}}(A, B) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, A)$. Si vede facilmente che un funtore contravariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}$ è anche covariante da $\mathcal{A}$ a $\mathcal{B}^0$ (o da $\mathcal{A}^0$ a $\mathcal{B}$).

Per poter definire la categoria di tutte le categorie prendendo i funtori come morfismi bisogna essere certi che i funtori fra due categorie date formano un insieme, questo non è vero in generale, una strada che si segue per evitare di cadere nelle contraddizioni della teoria degli insiemi consiste nel restringersi alle *categorie piccole* ovvero categorie in cui la classe degli oggetti sia un insieme, in questo caso i funtori fra due categorie piccole formano un insieme e non vi sono difficoltà a considerare la categoria in cui gli oggetti siano le categorie piccole ed i morfismi i funtori.

L'unica difficoltà di questo approccio (che peraltro non è troppo seria) si trova nel fatto che insiemi, gruppi ecc. non sono categorie piccole, non è difficile però sostituire tali categorie con categorie piccole che in pratica sono altrettanto utilizzabili, ad esempio si può prendere invece della categoria di tutti gli insiemi solo i sottoinsiemi di un insieme di cardinalità suffientemente elevata[2] da permettere di svolgere all'interno di tale insieme di insiemi tutte le operazioni di cui si ha bisogno, lo stesso si dica per i gruppi o gli spazi topologici.

Esempi

(1) La realizzazione geometrica è un funtore dalla categoria dei complessi simpliciali a quella degli spazi topologici (Cap.4).
(2) Dato uno spazio X con un punto x_0 la fibra $F := p^{-1}(x_0)$ di un rivestimento $p : E \to X$ è un funtore dalla categoria dei rivestimenti a quella dei $\pi_1(X, x_0)$ insiemi (Cap.3).

[2]Tecnicamente va data la nozione di *universo*

(3) Dato un campo K ed un insieme A sia $K[A]$ lo spazio vettoriale costruito prendendo A come base. Si ottiene un funtore dalla categoria degli insiemi a quella degli spazi vettoriali (con morfismi le funzioni lineari).

Esempio-Esercizio 1.3 Verificare i dettagli della seguente discussione.

Fissiamo una categoria $\mathcal{C}$. Ogni oggetto $A \in \mathcal{C}$ permette di definire il funtore $h^A : \mathcal{C} \to Sets$ da $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi ponendo, per ogni oggetto $X \in ob(\mathcal{C})$:

$$h^A(X) := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \in ob(Sets).$$

Per ogni morfismo $f : X \to Y$ in $\mathcal{C}$, si definisce $h^A(f) : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, Y)$ tramite la composizione

$$h^A(g) := f \circ g$$

Il funtore h^A viene di solito indicato con $h^A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ ed è un funtore covariante che si dice *rappresentato* dall'oggetto A di $\mathcal{C}$.

In modo del tutto analogo si può definire in funtore controvariante $h_A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, A)$.

Fra le idee categoriche vi è quella di isomorfismo, che generalizza quella di applicazione biunivoca fra insiemi, di isomorfismo di gruppi, di omeomorfismo fra spazi topologici ecc..

Un isomorfismo f fra due oggetti A, B di una categoria $\mathcal{C}$ è un morfismo $f : A \to B$ per cui esista un'altro morfismo $g : B \to A$ tale che

$$g \circ f = 1_A, \; f \circ g = 1_B.$$

La seguente proprietà è immediata dagli assiomi di categoria.

Proposizione.

(1) *Se $f : A \to B$ è un isomorfismo, l'elemento $g : B \to A$ tale che $g \circ f = 1_A$, $f \circ g = 1_B$ è unico (e si denota f^{-1}).*

(2) *Se $f : A \to B$ è un isomorfismo in $\mathcal{C}$ ed $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ è un funtore allora anche $F(f) : F(A) \to F(B)$ è un isomorfismo (in $\mathcal{D}$).*

1.4 Esercizio Provare che un morfismo $f : A \to B$ è un isomorfismo se e solo se, per ogni oggetto X la composizione $h \in (X, A) \to f \circ h \in (X, B)$

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \xrightarrow{f \circ -} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$$

è biunivoca (risultato analogo per $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B, X) \xrightarrow{- \circ f} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X)$).

Per completare l'approccio categorico conviene introdurre l'ultima definizione formale, quella che permette di trattare i funtori fra due categorie date $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ come gli oggetti di una nuova categoria.

Per fare ciò dobbiamo definre i morfismi fra due tali funtori, che chiameremo *trasformazioni naturali.* Diamo la definizione per funtori covarianti, il caso controvariante è simile.

1.5 Definizione. *Dati due funtori $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ fra due categorie, una* **trasformazione naturale** *$\varphi : F \to G$ fra i due funtori consiste nel dare, per ogni oggetto $A \in ob(\mathcal{A})$ un morfismo $\varphi_A : F(A) \to G(A)$ (in $\mathcal{B}$) tale che, per ogni coppia di oggetti $A, B \in ob(\mathcal{C})$ e per ogni morfismo $f : A \to B$ il seguente diagramma sia commutativo.*

$$\begin{array}{ccc} F(A) & \xrightarrow{\varphi_A} & G(A) \\ {\scriptstyle F(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle G(f)} \\ F(B) & \xrightarrow[\varphi_B]{} & G(B) \end{array} \tag{1.6}$$

La classe delle trasformazioni naturali fra due funtori $F, G : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ viene indicata con $Nat(F, G)$.

Usualmente (ed in particolare se $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ sono due categorie piccole) si tratta di un insieme che si può quindi prendere come insieme dei morfismi per definire la categoria dei funtori dalla categoria $\mathcal{A}$ alla categoria $\mathcal{B}$, indicheremo con $F(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ questa categoria di funtori. Le proprietà relative all'identità e composizione sono evidenti.

Dalle idee generali date segue quella di *isomorfismo naturale* fra due funtori, ovvero una trasformazione naturale che ammetta una inversa, ed anche quella di **equivalenza di categorie**.

Una equivalenza fra le categorie $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ è una coppia di funtori $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, $G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ tali che $G \circ F$ sia naturalmente isomorfo alla identità di $\mathcal{A}$ e $F \circ G$ sia naturalmente isomorfo alla identità di $\mathcal{B}$.

Funtori rappresentabili

1.7 Definizione. *Un funtore covariante $F : \mathcal{C} \to Sets$ da una categoria $\mathcal{C}$ alla categoria degli insiemi si dice rappresentabile se esiste un oggetto $A \in ob(\mathcal{C})$ ed un isomorfismo naturale da F al funtore $h^A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$ (rappresentato da A). Si dice allora che A rappresenta F.*

Proponiamo al lettore di analizzare i dettagli della seguente costruzione fondamentale detta *Lemma di Yoneda*.

Partiamo da un arbitrario funtore covariante $F : \mathcal{C} \to Sets$ a valori nella categoria degli insiemi e da un funtore rappresentabile $h^A := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, -)$. Vogliamo studiare l'insieme $Nat(h^A, F)$ delle trasformazioni naturali fra tali funtori e provare che si identifica (in modo naturale) con l'insieme $F(A)$.

Consideriamo $\varphi \in Nat(h^A, F)$ una trasformazione naturale. Per definizione, dato comunque un oggetto $X \in ob(\mathcal{C})$ abbiamo un morfismo $\varphi_X : h^A(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, X) \to F(X)$

e, per un morfismo $h : X \to Y$ è commutativo il diagramma:

$$
\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,X) & \xrightarrow{\varphi_X} & F(X) \\
{\scriptstyle h^A(h)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(h)} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,Y) & \xrightarrow[\varphi_Y]{} & F(Y)
\end{array} \tag{1.8}
$$

In particolare considerando $\varphi_A : h^A(A) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A) \to F(A)$ vediamo che possiamo definire un elemento canonico associato a φ

$$
\varphi_A(1_A) \in F(A) \tag{1.9}
$$

Il diagramma 1.3.1 applicato ad un morfismo $f : A \to B$ (elemento di $h^A(B)$) produce:

$$
\begin{array}{ccc}
1_A \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,A) & \xrightarrow{\varphi_A} & F(A) \\
{\scriptstyle h^A(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle F(f)} \\
f = h^A(f)(1_A) \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B) & \xrightarrow[\varphi_B]{} & F(B)
\end{array}
$$

Se ne deduce l'identità

$$\varphi_B(f) = F(f)(\varphi_A(1_A))$$

ovvero l'elemento $\varphi_A(1_A)$ determina completamente il valore di φ_B qualunque sia B.

Viceversa dato un elemento arbirario $u_A \in F(A)$ la formula $f \to F(f)(u_A)$ definisce una trasformazione naturale fra h^A ed F.

A questo punto è facile vedere cha la applicazione $Nat(h^A, F) \to F(A)$ data da $\varphi \to \varphi_A(1_A)$ è una corrispondenza biunivoca.

In particolare abbiamo anche una identificazione $Nat(h^A, h^B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(B,A)$ che ha una ulteriore interpretazione.

Si può pensare che associare ad un oggetto $A \in ob(\mathcal{C})$ il funtore h^A è di nuovo un funtore controvariante, dalla categoria $\mathcal{C}$ alla categoria $F(\mathcal{C}, Sets)$ dei funtori a valori insiemi.

A questo punto per chiarire meglio la costruzione possiamo introdurre la nozione di *sottocategoria piena* di una categoria data.

Una categoria $\mathcal{B}$ si dice sottocategoria di una categoria $\mathcal{C}$ se:

1) la classe degli oggetti di $\mathcal{B}$ è contenuta nella classe degli oggetti di $\mathcal{C}$.

2) Per ogni coppia di oggetti $A, B \in ob(\mathcal{B})$ si ha che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A,B) \subset \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

3) La composizione di due morfismi di $\mathcal{B}$ in $\mathcal{B}$ coincide con la composizione in $\mathcal{C}$

4) L'identità di un oggetto in $\mathcal{B}$ coincide con l'identità in $\mathcal{C}$.

Inoltre si dice che $\mathcal{B}$ è una sottocategoria piena di una categoria $\mathcal{C}$ se per ogni coppia di oggetti $A, B \in ob(\mathcal{B})$ si ha che $\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(A,B) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,B)$. $\square$

Con queste definizione provare:

1.10 Esercizio La categoria $\mathcal{C}$ è equivalente alla sottocategoria piena di $F(\mathcal{C}, Sets)$ formata dai funtori rappresentabili.

Uno degli utilizzi del lemma di Yoneda è il seguente. Spesso per costruire un oggetto A in una categoria $\mathcal{C}$ si segue la strategia:

Si costruisce un funtore F a valori insiemi e si prova che è rappresentabile. L'oggetto A deve essere un oggetto che rappresenta F. L'unicità di A a meno di unico isomorfismo segue dal:

COROLLARIO. *Se A, B sono due oggetti che rappresentano lo stesso funtore F dal lemma di Yoneda abbiamo un isomorfismo naturale fra h^A, h^B che quindi proviene da un ben determinato isomorfismo fra B ed A.*

Facciamo degli esempi importanti. Supponiamo di voler definire il prodotto $A \times B$ di due oggetti di una categoria $\mathcal{C}$. Il prodotto $A \times B$ fra insiemi è caratterizzato dalla proprietà seguente:

Dare una funzione $f : X \to A \times B$ è equivalente a dare una coppia di funzioni *le coordinate* $f_1 : X \to A,\ X \to B$.

Diremo che in una categoria $\mathcal{C}$ esiste il prodotto di due oggetti A, B se il funtore controvarieante $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ a valori nella categoria degli insiemi è rappresentabile.

1.11 Esercizio Dimostrare che un oggetto C rappresenta tale funtore se e solo se esistono due applicazioni $p_1 : X \to A,\ p_2 : X \to B$ dette le due proiezioni per cui valga la proprietà universale seguente:

Per ogni oggetto $X \in ob(\mathcal{C})$ la applicazione $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, C) \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, A) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, B)$ data da $f \to (p_1 \circ f,\ p_2 \circ f)$ è biunivoca.

Naturalmente non è detto che due oggetti abbiano sempre un prodotto ma il Lemma di Yoneda ci assicura che, se lo ammettono, questo è unico a meno di un unico isomorfismo.

In modo duale si può definire il *coprodotto* che è il prodotto nella categoria opposta.

A questo punto il Lettore dovrebbe prendere tutte le possibili categorie di cui è a conoscenza ed analizzare le nozioni di prodotto e coprodotto nelle varie categorie. Questo è un esercizio molto utile.

Un'altra idea interessante è quella di oggetto iniziale e finale in una categoria. Per questa idea si considera il funtore costante che ad ogni oggetto associa l'insieme $\{0\}$ consistente di un solo elemento e ad ogni morfismo associa l'identità di tale insieme. Questo funtore si può sia pensare come covariante che come controvariante.

1.12 Esercizio Discutere in tutte le categorie note il problema se il funtore costante con valore un punto sia rappresentabile come funtore covariante, nel qual caso un oggetto che lo rappresenta viene detto *oggetto iniziale*; che come funtore controvariante, nel qual caso un oggetto che lo rappresenta viene detto *oggetto finale* nella categoria data.

Completiamo la discussione con la importante nozione di *funtori aggiunti* che in qualche modo generalizza le idee legate alla nozione di rappresentabilità.

1.13 Definizione. *Date due categorie $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ e due funtori (covarianti)*

$$F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \; G : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$$

diremo che F, G sono aggiunti (F aggiunto sinistro di G, risp. G aggiunto destro di F) se esiste un isomorfismo naturale dei due funtori da $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ agli insiemi

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$$

Il legame con la rappresentabilità viene osservando che $F(A)$ rappresenta il funtore covariante $B \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(A, G(B))$ ovvero $G(B)$ rappresenta il funtore controvariante $A \to \mathrm{Hom}_{\mathcal{B}}(F(A), B)$

Esempi.

(1) Dai gruppi abeliani agli insiemi si prende l'insieme sostegno del gruppo (*forgetful functor*), dagli insiemi ai gruppi abeliani si costruisce il gruppo libero con base l'insieme dato.

(2) Medesima costruzione per tutti i gruppi si costruisce il gruppo libero non abeliano (cf. Cap. 3.8).

Vedremo altri esempi in seguito.