Def. Funzioni meromorfe

Una funzione $\varphi : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ si dice meromorfa se $\forall z_0 \in \Omega$ $\exists\, \mathcal{U}$ intorno di z_0 ($z_0 \in \mathcal{U} \subset \Omega$) e due funzioni $f, g \in H(\mathcal{U})$ t.c. (g non id nulla)

$$\varphi = \frac{f}{g} \quad \text{su } \mathcal{U}$$

NB. In altri termini, una funzione φ è meromorfa se è olomorfa in Ω con possibili sing. isolate di tipo polo (o rimovibili)

Se φ è meromorfa in Ω e K è un compatto in Ω, K contiene al più un numero finito di zeri di φ $z_1, \dots, z_j$ con molt. finite

$m_1, \dots, m_j$

e un no. finito di poli

$w_1, \dots, w_M$ di ordine (finito)

$p_1, \dots, p_M$

Teor (Principio dell'argomento)

Sia φ una funz meromorfa in Ω, sia G aperto limitato, $G \subset \overline{G} \subset \Omega$, tale che φ non ha né zeri né poli sulla frontiera ∂G. Supp. che ∂G sia reg. a tratti.

Sia N la somma delle molt. $m_1, \dots, m_J$ degli zeri di φ in G, sia P la somma degli ordini p_m dei poli di φ in G. $(p_1, \dots, p_M)$.

Allora vale

$$\boxed{\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}\, dz = \underline{N - P}}$$

Oss. $\frac{\varphi'}{\varphi}\, dz = \underline{d(\log \varphi)} = d(\log|\varphi| + i \underline{\arg \varphi})$

$$\int_{\partial G} \frac{\varphi'}{\varphi}\, dz = \underline{i \int_{\partial G} d(\arg \varphi)}$$

NB Questo Teor. è noto anche come teorema dell'indicatore logaritmico

Dim del Teor. $z_1, \dots, z_J$ zeri di molt. $m_1, \dots, m_J$

Poli $w_1, \dots, w_M$ di ordine $p_1, \dots, p_M$.

$\frac{\varphi'}{\varphi}$ è una funzione meromorfa con poli

$z_1, \dots, z_J$ e $w_1, \dots, w_M$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\varphi'}{\varphi}\, dz = \sum_{z \in \{z_1, \dots, z_J, w_1, \dots, w_M\}} \operatorname{Res}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}, z\right)$$

Studio $\frac{\varphi'}{\varphi}$ vicino a z_j.

$$\varphi(z) = a_{m_j}(z - z_j)^{m_j} + \dots = a_{m_j}(z - z_0)^{m_j}(1 + \dots)$$

$$\varphi'(z) = m_j a_{m_j}(z - z_j)^{m_j - 1} + \dots =$$

$$= m_j \, a_{m_j} (z - z_j)^{m_j - 1} (1 + \dots)$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{m_j (z - z_j)^{m_j - 1} (1 + \dots)}{(z - z_j)^{m_j} (1 + \dots)} =$$

$$= m_j \frac{1}{(z - z_j)} (1 + \dots) =$$

$$= \frac{m_j}{(z - z_j)} + O(1)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}, z_j\right) = m_j$$

Vicino ad un polo w_m :

$$\varphi(z) = a_{p_m} \frac{1}{(z - w_m)^{p_m}} + \dots =$$

$$= \frac{a_{p_m}}{(z - w_m)^{p_m}} (1 + \dots)$$

$$\varphi'(z) = -a_{p_m} \frac{p_m}{(z-w_m)^{p_m+1}} + \cdots =$$

$$= -\frac{a_{p_m} p_m}{\underline{(z-w_m)^{p_m+1}}} \underline{(1+\cdots)}$$

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = -\frac{p_m}{(z-w_m)}(1+\cdots) =$$

$$= -\frac{p_m}{(z-w_m)} + O(1)$$

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}, w_m\right) = -p_m$$

$$\sum \mathrm{Res}\left(\frac{\varphi'}{\varphi}, \ldots\right) = m_1 + \cdots + m_K - p_1 - \cdots + p_M =$$

$$= N - P \qquad \square$$

Teor di Rouché Siano $f, g \in H(\Omega)$ sia G limitato, con front. reg. a tratti t.c. $\overline{G} \subset \Omega$. Supp. che su ∂G valga

$$(*) \qquad |f-g| < |f| + |g|$$

allora f e g hanno lo stesso numero di zeri in G, se contati con le loro molt.

Oss. Se vale $(*)$ su ∂G, né f né g ha zeri su ∂G

Poniamo $N(f)$ = no. di zeri di f contati con le loro molteplicità

$N(g)$ = no. di zeri di g contati ....

Consideriamo

$$\varphi = \frac{f}{g} \quad , \quad \frac{\varphi'}{\varphi} = \frac{f'}{f} - \frac{g'}{g}$$

$$\underline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{\varphi'}{\varphi}\,dz} = \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f'}{f}\,dz} - \underline{\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{g'}{g}\,dz} =$$

$$= N(f) - N(g)$$

Dimostriamo che

$$\int_{\partial G} \frac{\varphi'}{\varphi}\, dz = 0$$

Ricordiamo che su ∂G

$$|f - g| < |f| + |g|$$

$$|\varphi - 1|^2 < (|\varphi| + 1)^2$$

$$\cancel{|\varphi|^2} \underline{-2\,\mathrm{Re}\,\varphi} + \cancel{1} < \cancel{|\varphi|^2} + \underline{2|\varphi|} + \cancel{1}$$

Quindi su ∂G

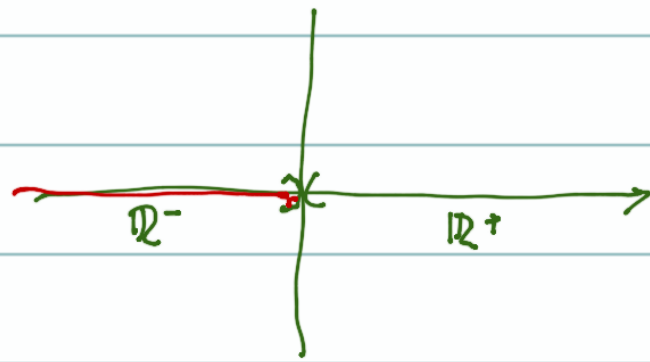
$$|\varphi| + \underline{\mathrm{Re}\,\varphi} > 0$$

questa disug è soddisfatta se $\mathrm{Re}\,\varphi > 0$

$$|\varphi| > -\mathrm{Re}\,\varphi \qquad , \quad (\mathrm{Re}\,\varphi)^2 + \underline{(\mathrm{Im}\,\varphi)^2} > (\mathrm{Re}\,\varphi)^2$$

Ovvero :

o vale $\underline{\operatorname{Re}\varphi > 0}$ oppure $\underline{\operatorname{Im}\varphi \neq 0}$



Cioè $\varphi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^-$, $\mathbb{R}^- = \{x+iy \mid y=0, \underline{x \leq 0}\}$.

Su questo ins. è def una determinaz. univoca del logaritmo

Poniamo

$$\underline{\Phi(z) = \operatorname{Log}(\varphi(z))}$$ olomorfa in un intorno di ∂G.

$$\frac{d}{dz}\Phi(z) = \frac{\varphi'}{\varphi}(z)$$

Quindi su ∂G:

$$\int_{\partial G} \frac{\varphi'}{\varphi}\, dz = \int_{\partial G} \Phi'(z)\, dz = 0 \qquad \llcorner$$

<u>Esempio</u> $f(z) = z^7 + \underline{\underline{5z^3}} - z - 2$ in $\underline{B_1(0)}$

$g(z) = 5z^3$ si annulla solo in 0 di ordine 3.

$|g|_{|\partial B_1} = 5$

$|f-g|_{\partial B_1} = |z^7 - z - 2| \leq 4 < 5 = |g|$

Quindi f ha 3 zeri in B_1, se contati con le loro molteplicità.

<u>Corollario</u> Sia $P(z) = z^N + a_{N-1} z^{N-1} + \dots + a_0$

Sia

$$M = \max \{ |a_{N-1}|, \dots, |a_0| \}.$$

Allora tutti gli zeri di P si trovano in

$$B_{M+1}(0).$$

Dim. $\quad g(z) = z^N$

$$|P - g|_{\partial B_{M+1}} = \left|\sum_{j=0}^{N-1} a_j z_j\right| \leq$$

$$\leq M \sum_{j=0}^{N-1} |M+1|^j = \cancel{M} \frac{(M+1)^N - 1}{\cancel{M+1-1}} = \;.$$

$$= (M+1)^N - 1 < (M+1)^N =$$

$$= |g| \,|_{\partial B_{M+1}}$$

— · —

$f \in H(\Omega)$, $f = u + iv$

C. R. :

$$\begin{cases} v_x = -u_y \\ v_y = u_x \end{cases}$$

$\underline{v_{xy}} = -u_{yy}$, $\underline{v_{xy}} = u_{xx}$

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \leftarrow$$

analog.

$$v_{yy} + v_{xx} = 0 \leftarrow$$

$\Delta = \partial_x^2 + \partial_y^2$ si chiama op. di Laplace

Le soluzioni di $\Delta u = 0$ si chiamano funzioni armoniche.

Domanda Sia $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ t.c.

$$\Delta u = 0$$

esiste $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ t.c.

$$u + iv \in H(\Omega) \quad ?$$

Esempio $\underline{\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}}$ e

$$u(x,y) = \log\sqrt{x^2+y^2} = \log|z|$$

In questo caso non esiste v t.c.

$$u + iv \in H(\Omega)$$

<u>Teorema</u> Sia Ω aperto semplicemente connesso
Sia $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ t.c.

$$\Delta u = 0$$

allora esiste $v \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ t.c.

$$f = u + iv \in H(\Omega).$$

<u>Dim.</u> Cerchiamo v t.c.

$$v_x = -u_y$$

$$v_y = u_x$$

Consid. la 1-forma

$$\omega = (-u_y)\,dx + u_x\,dy$$

ω è chiusa perché $u_{xy} = u_{yx}$
def su un ins. sempl. connesso, quindi è

esatta :

$$\omega = \underline{\underline{dv}} = v_x\,dx + v_y\,dy$$

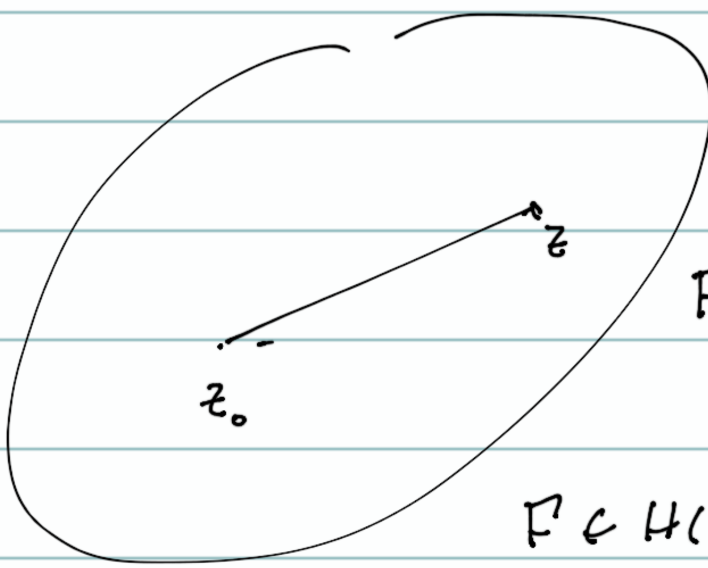
$\square$

Dim di un caso particolare

Supp. Ω convesso

Lemma Sia $f \in H(\Omega)$ allora $\exists\, F \in H(\Omega)$ t.c. $F' = f$.

Dim



Poniamo :

$$F(z) = \int_{[z_0, z]} f(\zeta)\, d\zeta$$

$F \in H(\Omega)$ e vale

$$F'(z) = f(z)$$

$\square$