$\boxed{\text{1-forme}}$

Def. Prese funzioni $A, B \in C(\Omega, \mathbb{R})$

si indica con

$$\omega = A\,dx + B\,dy$$

Def. Dato un cammino γ in Ω

si pone

$$\int_\gamma \omega = \int_a^b \left[A(\gamma(t))\gamma_1'(t) + B(\gamma(t))\gamma_2'(t) \right] dt$$

dove $\gamma = (\gamma_1, \gamma_2) : [a,b] \longrightarrow \Omega$.

Def ω si dice esatta se esiste

$F \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ t.c.

$$\omega = dF = F_x\,dx + F_y\,dy$$

Def ω si dice chiusa se

$$d\omega = (B_x - A_y)\,dx\,dy = 0$$

Lemma Se ω è esatta allora è chiusa.

Dim Identità di Schwarz

$$F_{xy} = F_{yx}$$

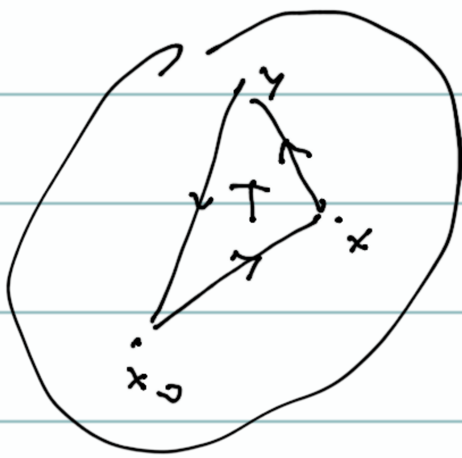
$$d(dF) = (F_{yx} - F_{xy})\, dx\, dy = 0 \qquad \square$$

Teor. Sia Ω convesso. Se ω è chiusa allora è esatta.

Dim. Sia $x_0 \in \Omega$, per ogni $x \in \Omega$ poniamo

$$F(x) = \int_{[x_0, x]} \omega$$

Per ogni altro $y \in \Omega$, $[x, y] \subset \Omega$



quindi

$$F(x) - F(y) =$$

$$= \int_{\partial T} \omega - \int_{[x,y]} \omega$$

Per Gauss-Green

$$\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega = 0$$

quindi $F(y) - F(x) = \int_{[x,y]} \omega = \int_0^1 \Big(A((1-t)x + ty)(y_1 - x_1)$

$$+ B((1-t)x + ty)(y_2 - x_2)\Big) dt =$$

$$= A(x)(y_1 - x_1) + B(x)(y_2 - x_2) + o(|y-x|)$$

Cioè $dF = A\,dx_1 + B\,dx_2$ $\square$

Def ω si dice localmente esatta se $\forall\, x_0 \in \Omega$ esiste $U \subset \Omega$ intorno di x_0 t.c. ω è esatta su U.

Corollario Se ω è chiusa in Ω allora è localmente esatta.

Def. $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ si dice <u>semplicemente connesso</u> se ogni cammino chiuso γ in Ω è omotopo (in Ω) a uno costante.

Più in dettaglio: se esiste

$$\Gamma : [a,b] \times [0,1] \to \Omega$$

applicaz. C^1 tale

$$\Gamma(t,0) = x_0 = \text{cost.} \in \Omega \quad \forall\, t \in [a,b],$$

$$\Gamma(a,s) = \Gamma(b,s) \quad \forall\, s \in [0,1], \quad e$$

infine

$$\Gamma(t,1) = \gamma(t) \quad \forall\, t \in [a,b].$$

Teor. Se Ω è sempl. connesso e ω è chiusa in Ω allora è esatta.

Def Sia $F : G \to \Omega$ applicaz. C^1

$$F(y) = (x_1(y_1,y_2),\, x_2(y_1,y_2))$$

Sia $\omega = A_1\, dx_1 + A_2\, dx_2$ forma su Ω

Si pone

$$F^*\omega = \sum_{i,j=1}^{2} A_i \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j$$

$F^*\omega$ si chiama di solito "pull-back" di ω. In Italiano penso si possa denominare "retroazione".

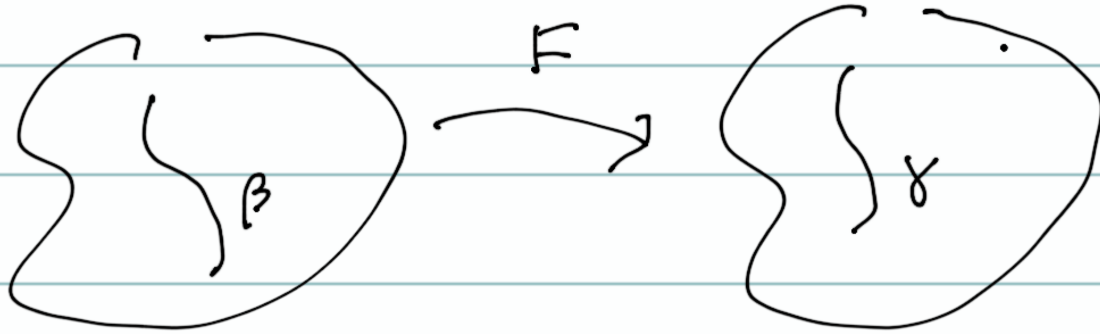
<u>Lemma</u> Se ω è chiusa anche $F^*\omega$ lo è.

<u>Dim.</u> ω è localm. esatta quindi localmente $\omega = f_{x_i} dx_i$. Allora

$$F^*\omega = \sum_{ij} f_{x_i} \frac{\partial x_i}{\partial y_j} dy_j =$$

$$= \sum_{ij} \partial_{y_j}(f(x(y))) dy_j = d(f\circ F) \quad \square$$

<u>Oss.</u> Il senso della retroazione è il seguente:



Se $\gamma = F \circ \beta$ allora

$$\int_\gamma \omega = \int_\beta F^* \omega .$$

<u>Dim del Teor.</u> Sia $\Gamma : [a,b] \times [0,1]$ l'applicaz. che dà l'omotopia di γ chiusa con una costante. Sia $R = [a,b] \times [0,1]$

$$\int_\gamma \omega = \int_{\partial R} \Gamma^* \omega = \int_R d(\Gamma^* \omega) = 0$$

Quindi, fissato $x_0 \in \Omega$, $\forall\, x \in \Omega$ e per ogni cammino γ di estremi x_0, x

$$f(x) = \int_\gamma \omega \qquad \text{è indip. dal}$$

cammino. Si verifica che

$$df = \omega \qquad \square$$

<u>Oss.</u> Tutti i reg. si estendono a forme te chi comb. Ai siano a valori complessi.

<u>Lemma</u> Sia $f \in H(\Omega)$, la forma

$$\omega = f(z)\,dz = f(z)(dx + i\,dy)$$

è chiusa

<u>Dim</u> $d\omega = f_{\bar{z}}\, dz \wedge d\bar{z} = 0 \qquad \square$

<u>Teor.</u> Se Ω è sempl. connesso e $f \in H(\Omega)$ allora f ha una primitiva $F \in H(\Omega)$.

<u>Dim.</u> $\omega = f\,dz$ è esatta in Ω

quindi $\omega = dF$ e F risulta olomorfa, infatti:

$$dF = f\,dz \Longrightarrow \partial_{\bar z} F = 0 \qquad \square$$

<u>Esempio</u> Sia Ω sempl. connesso, $z_0 \notin \Omega$.
Esiste una det olomorfa di $\log(z-z_0)$ def su tutto Ω.
Fissiamo $w_0 \in \Omega$ e fissiamo una det del logaritmo in w_0, p. es. $\log(w_0 - z_0) = \mathrm{Log}(w_0 - z_0)$
Sia $z \in \Omega$ e γ un cammino di estremi w_0 e z. Poniamo

$$\log(z-z_0) = \mathrm{Log}(w_0 - z_0) + \int_\gamma \frac{d\zeta}{\zeta - z_0}$$

<u>Determinaz. di una radice n-sima olomorfa su Ω</u>

$$\sqrt[n]{z-z_0} = \exp\left\{ \frac{1}{n} \log(z-z_0) \right\} .$$