Seconda foglio 2019

1) $f(z) = \frac{1}{z^2+1}$ ha due poli semplici in i e $-i$, $B_1(i)$ contiene solo il polo i. Quindi

$$\int_{|z-i|=1} \frac{1}{1+z^2}\, dz = 2\pi i \, Res\left(\frac{1}{1+z^2}, i\right) =$$

$$= 2\pi i \, \frac{1}{2i} = \pi$$

Se $|z| \leq 1$ $\quad Re(9+z^3) \geq 8 > 0$ quindi

$Log(9+z^3)$ è olomorfa in $B_1(0)$

$$\int_{|z|=1} \frac{Log(9+z^3)}{z}\, dz = 2\pi i \, Res\left(\frac{Log(9+z^3)}{z}, 0\right) =$$

$$= 2\pi i \, \frac{\log 9}{1}$$

2) Se $f(\Omega) \subset \ell$, $f(\Omega)$ non ha punti interni. Quindi f non è mappa aperta, allora è costante.

3) Se $|\alpha| < 1$, $|f(z)| \to 0$ per $z \to \infty$ quindi f è limitata.

2

Per Liouville, $f \equiv$ cost., ma $f \to 0$ all'∞

quindi $f \equiv 0$.

Sia $\alpha > 0$

Sia $z_0 \in \mathbb{C}$, $r > |z_0| + 1$, per ogni $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$f^{(k)}(z_0) = \frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial B_r(z_0)} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz$$

Se $z \in \partial B_r(z_0)$ $\quad |z| \geq |z - z_0| - |z_0| > 1$

quindi $\quad |f(z)| \leq M |z|^\alpha \leq M (r + |z_0|)^\alpha$

$$|f^{(k)}(z_0)| \leq \frac{k!}{2\pi} 2\pi \cancel{r} \frac{M (r + |z_0|)^\alpha}{r^{k+\cancel{1}}}$$

quindi se $k > \alpha$

$f^{(k)} \equiv 0$

Cioè f è polinomio di grado $N \leq \alpha$.

4 Se $\exists$ $z_0 \in \mathbb{C}$ t.c. $f(z_0) = w$ ci sono

$z_n = z_0 + \frac{1}{n}$ e $f(z_n) \to f(z_0) = w$.

Supp. $w \notin f(\mathbb{C})$ e supp. per ass.

che esista $\delta > 0$ tale che

~~Ma~~ $|f(z)-w| \geq \delta > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Allora $g(z) = \dfrac{1}{f(z)-w} \in H(\mathbb{C})$ e

$$|g(z)| \leq \frac{1}{\delta} \quad \forall z$$

Per Liouville $g \equiv \cos t \Rightarrow f \equiv \cos t$ ASS.

Sia allora $\delta = \frac{1}{n}$ $\exists$ $z_n \in \mathbb{C}$ t.c.

$$|f(z_n) - w| < \frac{1}{n}$$

$\Rightarrow \quad f(z_n) \to w. \quad \square$