

CAPITOLO 5

ALCUNI ASPETTI SUI MODELLI MATEMATICI DELLE ONDE GRAVITAZIONALI DI SUPERFICIE LIBERA IN MARE ED IN VASCA CHIUSA

5.1 - INTRODUZIONE

In questo capitolo verranno presi in esame alcuni aspetti delle onde gravitazionali in situazioni specifiche che riguardano l'avvicinamento alla costa e la loro generazione e propagazione in vasca chiusa. Entrambi argomenti sono di notevole interesse nell'ambito del problema dei carichi d'onda, il primo in quanto la disposizione di un'opera marittima, galleggiante e non, rispetto alla direzione delle onde risulta evidentemente di fondamentale importanza (inoltre le onde nel loro avvicinamento alla costa cambiano anche altezza), il secondo in quanto le prove sperimentali di tenuta al mare o di carichi su struttura fissa in laboratorio sono molto utilizzate nella fase finale del progetto e pertanto la qualità delle onde nel bacino chiuso va verificata per valutare la reale risposta della struttura.

5.2 - PROPAGAZIONE DELLE ONDE NEL LORO AVVICINAMENTO ALLA COSTA

Oggigiorno i modelli matematici adatti a descrivere la generazione e propagazione del moto ondoso per effetto del vento hanno raggiunto un ottimo grado di affidabilità ed accuratezza, ammesso che l'intensità del vento sia prevista accuratamente. Si tratta di modelli spettrali (dominio delle frequenze) in cui l'energia del vento viene trasferita allo spettro frequenza per frequenza.

Senza entrare nei dettagli della modellistica che richiederebbero un intero corso (si rimanda alla letteratura specifica), l'equazione che regola la formazione, la propagazione e la dissipazione dello spettro del mare è data da (Tolman, 2002).

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial t} + \nabla_x \cdot \dot{\mathbf{x}}N + \frac{\partial}{\partial k} \dot{k}N + \frac{\partial}{\partial \theta} \dot{\theta}N &= \frac{S}{\sigma}, \\ \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{c}_g + \mathbf{U}, \\ \dot{k} &= -\frac{\partial \sigma}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial s} - \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial s}, \\ \dot{\theta} &= -\frac{1}{k} \left[\frac{\partial \sigma}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial m} - \mathbf{k} \cdot \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial m} \right], \end{aligned} \tag{5.2.1}$$

dove $N(k, \theta, \mathbf{x}, t)$ è la cosiddetta *wave action* data da densità spettrale di energia divisa per la frequenza angolare $N(k, \theta, \mathbf{x}, t) = F(k, \theta, \mathbf{x}, t)/\sigma$.

Le equazioni riportate sopra valgono solo per griglie in coordinate cartesiane. Per domini su grande scala, tali equazioni devono essere trasformate in coordinate sferiche geografiche.

\mathbf{x} è il vettore posizione, t è il tempo, k il numero d'onda, θ la direzione, d la profondità locale e σ la frequenza angolare data da $\sigma^2 = gk \tanh(kd)$ dove in presenza di corrente vale $\omega = \sigma + \mathbf{k} \cdot \mathbf{U}$ con \mathbf{k} ed \mathbf{U} rispettivamente i vettori numero d'onda e velocità della corrente.

Il LHS dell'equazione corrisponde alla derivata totale D/Dt di $N(k, \theta, \mathbf{x}, t)$ rispetto al tempo.

Il RHS corrisponde invece a termini sorgente in cui si vanno a introdurre l'azione del vento, la dissipazione per *breaking*, il *bottom friction* e l'interazione onda-onda. L'interazione non-lineare onda-onda è la modellazione secondo cui si trasferisce energia da una frequenza ad un'altra e quindi si può avere modifiche dello spettro d'energia anche in assenza di cause forzanti (vento) ed in presenza di deboli cause dissipatrici (ad es. deboli o quasi nulli effetti viscosi in alto fondale).

A titolo di esempio di cosa significhi interazione onda-onda (*wave-wave interaction*), in Fig. 5.2.1 è mostrata l'evoluzione di uno spettro di ampiezza lungo una vasca chiusa (numerica). In ascissa c'è la frequenza angolare, in ordinata la generica posizione dimensionale lungo la vasca ed il contouring colorato rappresenta l'ampiezza delle armoniche. La Fig. 5.2.1 di sinistra mostra il caso di una simulazione lineare in cui evidentemente non c'è trasferimento di energia tra le frequenze al variare della posizione lungo la vasca. La Fig. 5.2.1 di destra invece è riferita al caso di simulazione completamente non-lineare. In entrambi i casi non sono modellati effetti viscosi o dissipativi (flusso a potenziale di velocità). La Fig. 5.2.2 mostra i rispettivi spettri d'ampiezza alla posizione lungo la vasca $X=13$. Da notare che per entrambe le simulazioni l'input dell'ondogeno è stato esattamente lo stesso.

E' interessante notare come nel caso lineare non vi sia alcuna variazione dello spettro lungo la vasca mentre è altrettanto evidente come questo sia avvenuto nel caso non lineare (destra).

Questo aspetto ha varie conseguenze tra cui forse il più immediato ed evidente è il cambio di forma del profilo della superficie libera. In Fig. 5.2.3 sono riportati i profili della superficie libera in prossimità della sezione $X=13$ nel caso lineare e non lineare. Si vede bene come la presenza delle alte frequenze create nell'interazione onda-onda produca un picco ben più marcato della cresta, quasi il 30% più alto.

A supportare il risultato di questo tipo di simulazioni, in Fig. 5.2.4 si riporta il risultato ottenuto dal Prof. Chaplin (1996) in laboratorio.

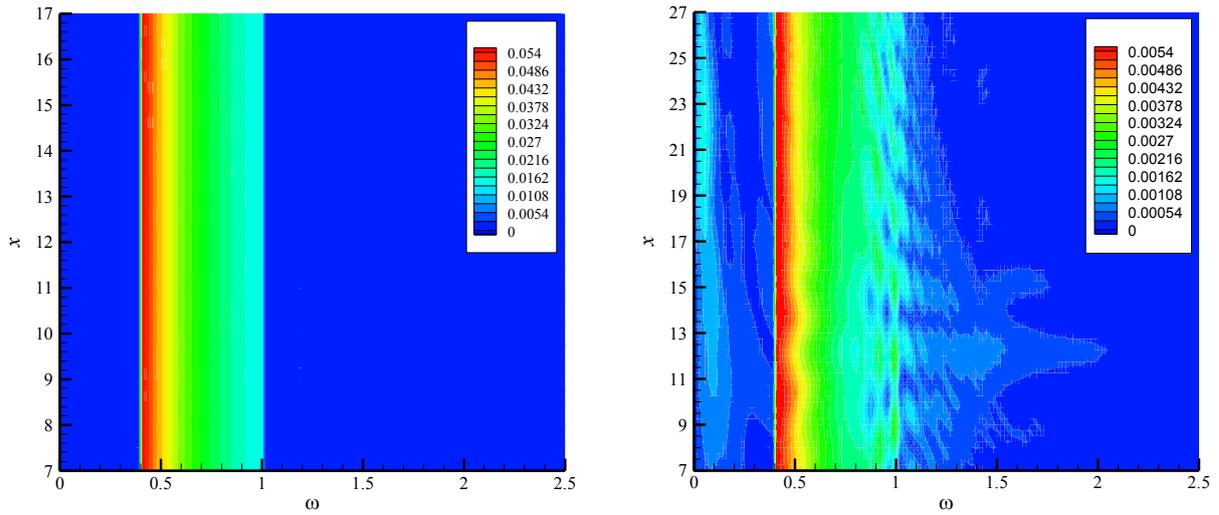


Fig. 5.2.1

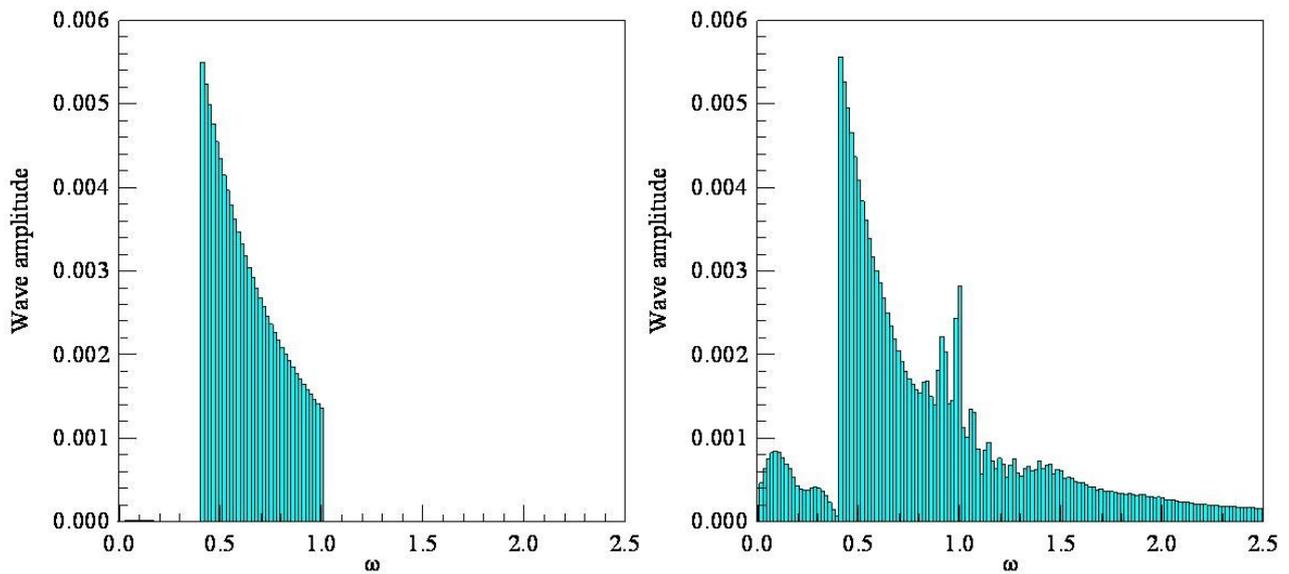


Fig. 5.2.2

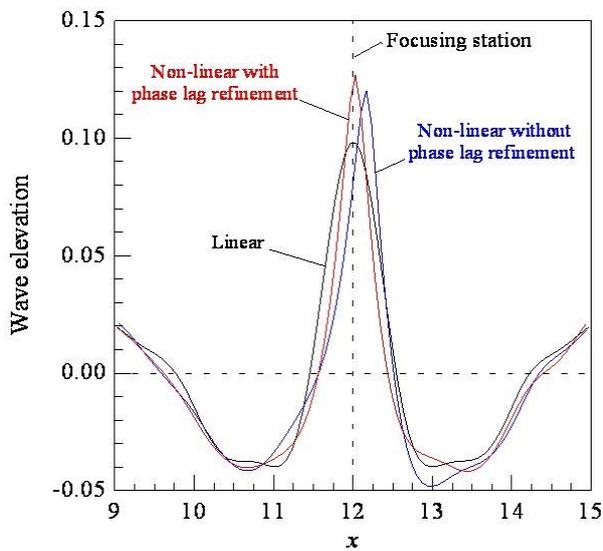


Fig. 5.2.3

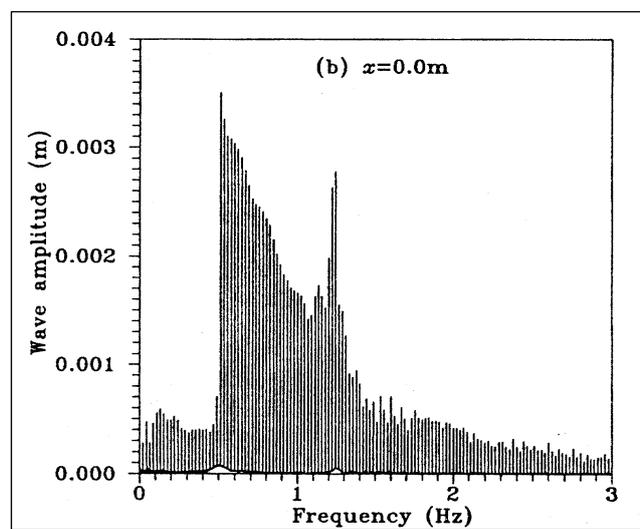


Fig.5.2.4 - Risultato sperimentale – Chaplin (1996)

Tornando ai modelli spetrali per l'evoluzione spazio-temporale dello spettro d'energia, le equazioni sopra descritte (accennate) portano a stime molto accurate dello spettro del mare su regioni arbitrariamente grandi. Ovviamente la griglia di calcolo deve essere opportunamente fine per valutare adeguatamente la variazione del fondale, la linea di costa e la variazione del campo di vento.

Si allega (Fig. 5.2.5-9) qualche risultato tratto da simulazioni che utilizzano la modellazione di cui sopra.

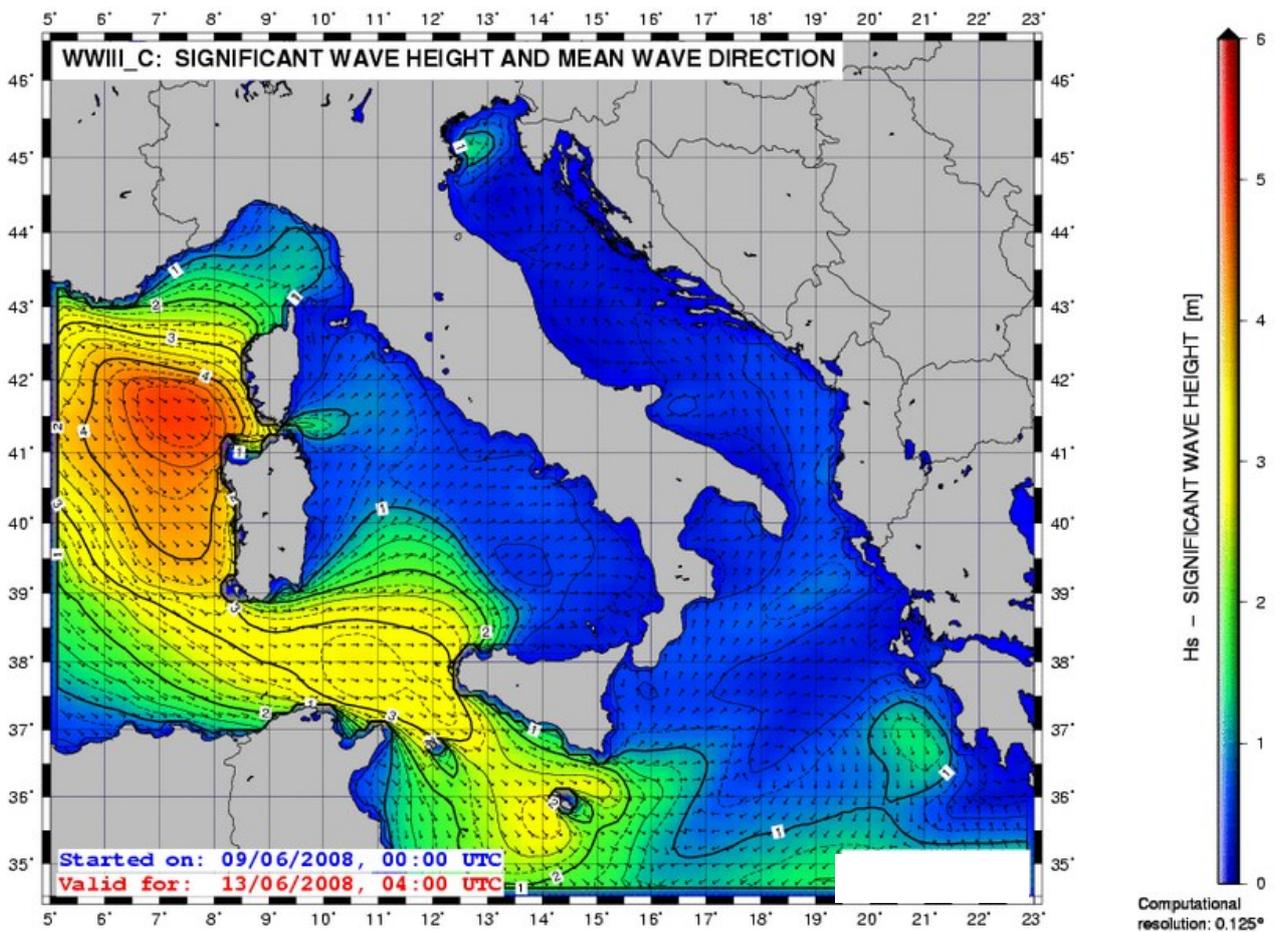


Fig. 5.2.5

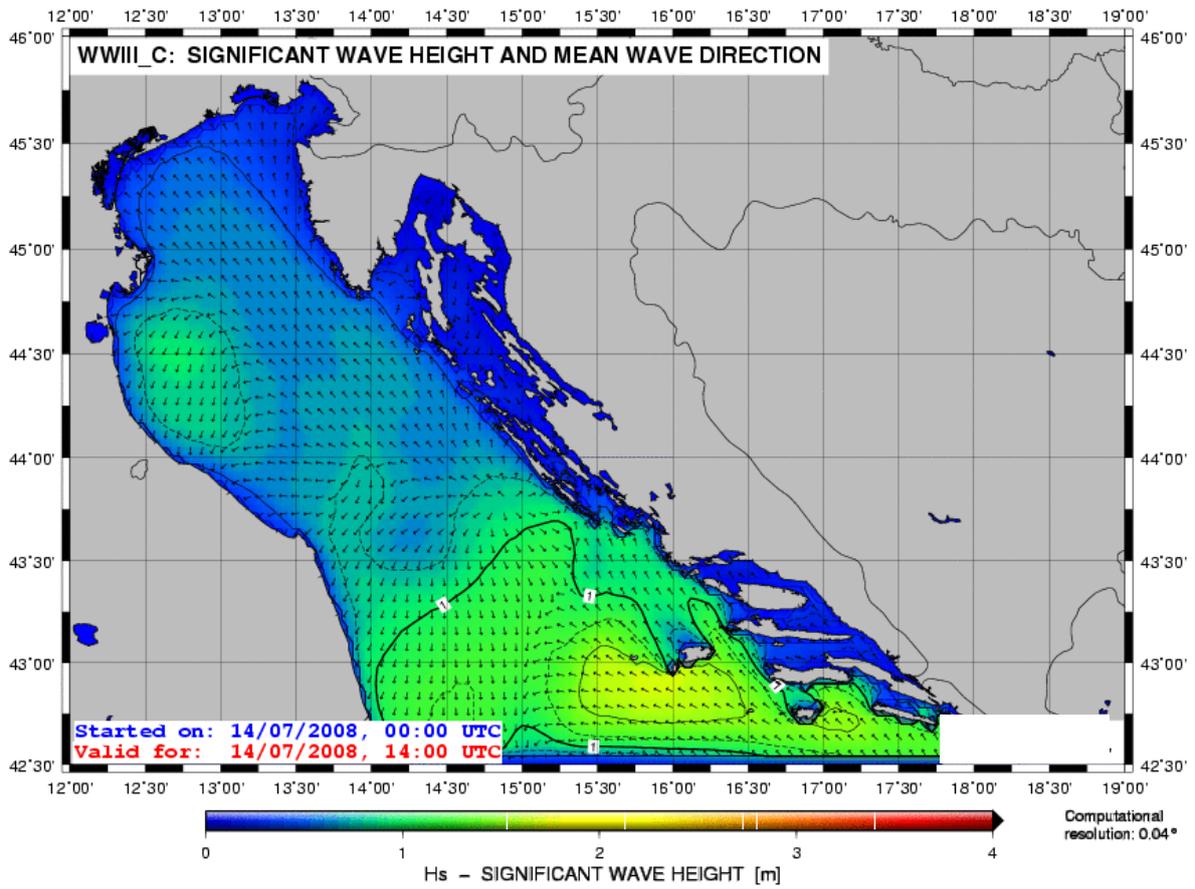


Fig. 5.2.6

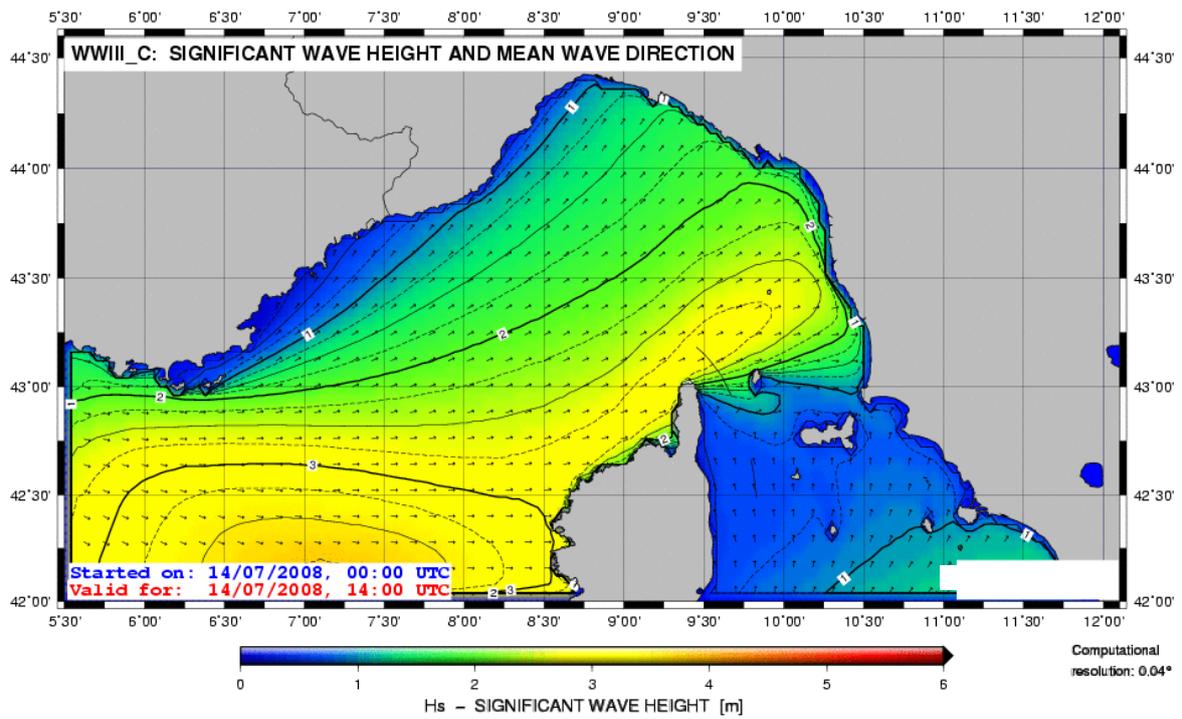


Fig. 5.2.7

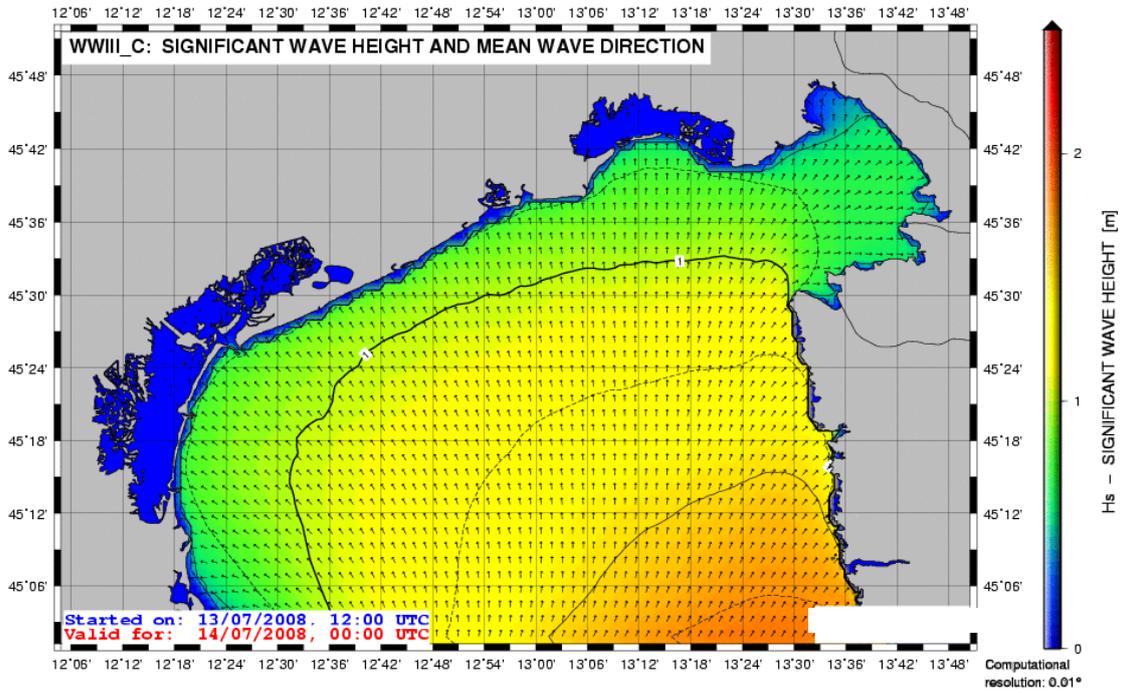


Fig. 5.2.8

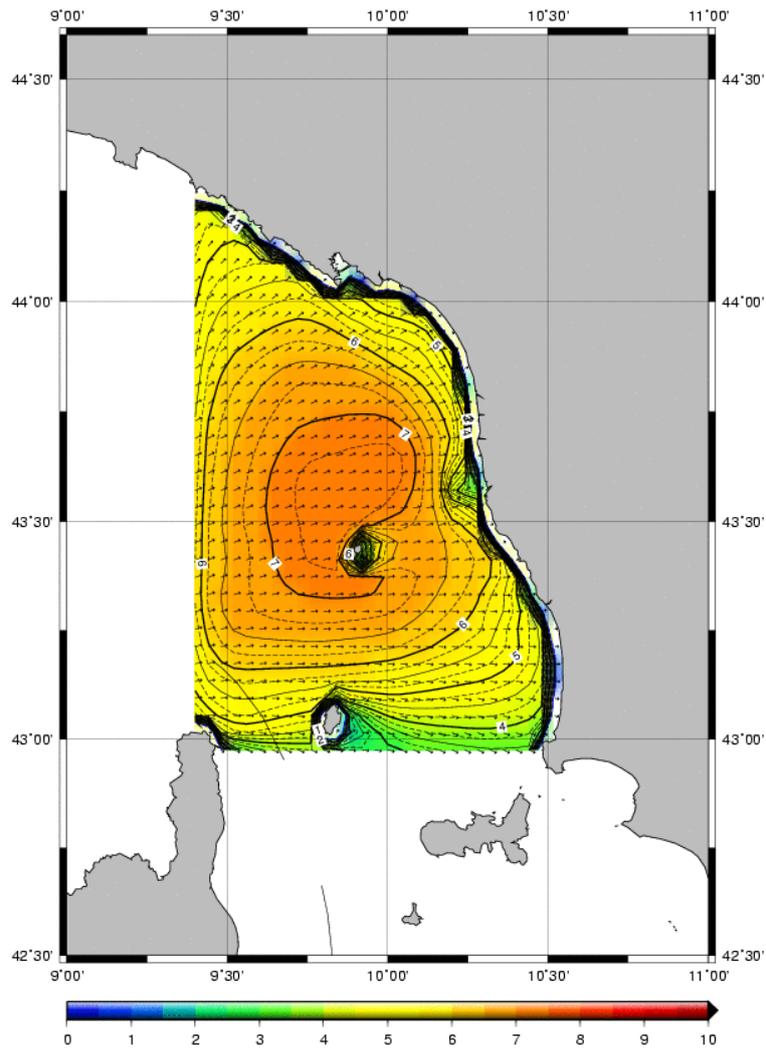


Fig. 5.2.9

Si può però avere una visione semplificata di come si comportano le onde nell'approccio alla costa utilizzando degli strumenti decisamente più agili.

Per un'onda piana progressiva secondo la teoria lineare di Airy, l'elevazione dell'onda lungo la direzione vettoriale \vec{x} è data da

$$\eta(\vec{x}, t) = \frac{H}{2} \cos(k\vec{x} - \omega t) \quad (5.2.2)$$

e ponendo $\vartheta = k\vec{x} - \omega t$ si può verificare semplicemente che (proprietà della funzione ϑ continua) :

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial \vec{x}} \right) - \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} \right) = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\partial}{\partial t} k + \frac{\partial}{\partial \vec{x}} \omega = 0 \quad (5.2.3)$$

Ciò significa che per il numero d'onda k , se il sistema ondoso è stabilizzato nel tempo (non ci sono altre forzanti) allora vale $\frac{\partial}{\partial t} \omega = 0$ e pertanto

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial \vec{x}} \omega = 0} \quad (5.2.4)$$

Questo significa che qualsiasi sia il fondale, se il campo ondoso è stabilizzato nel tempo punto per punto del dominio, la frequenza (o il periodo) delle onde non cambia nel cambio di fondale (CONSERVAZIONE DEL PERIODO). Dalla conservazione del periodo si possono trarre delle conclusioni sulla variazione della lunghezza d'onda, della celerità e della velocità di gruppo:

$$\omega^2 = k \cdot g \cdot \tanh(k \cdot d) \quad (5.2.5)$$

e rielaborandola:

$$c = \sqrt{\frac{g}{k} \cdot \tanh(k \cdot d)} \quad (5.2.6)$$

si ha:

$$1. \quad \lambda = \frac{2\pi \cdot g}{\omega^2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right) = \lambda_o \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right) \quad \text{dove } \lambda_o = \text{lunghezza d'onda in alto fondale}$$

$$2. \quad c = \frac{\lambda}{T} \quad \text{la celerità (velocità di fase) varia con il fondale } d \text{ come } \lambda, \text{ essendo } T = \text{cost.}$$

$$3. \quad c_g = \frac{c}{2} \cdot \left(1 + \frac{2k \cdot d}{\sinh(2k \cdot d)}\right) = \text{velocità di gruppo} \quad \text{dove } c = \frac{g}{\omega} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right)$$

$$c_o = \frac{g}{\omega} = \text{celerità in alto fondale} \quad \rightarrow \quad c_g = c_o \cdot \frac{1}{2} \cdot \tanh\left(\frac{2\pi \cdot d}{\lambda}\right) \cdot \left(1 + \frac{2k \cdot d}{\sinh(2k \cdot d)}\right)$$

Fissato il fondale d si calcola la lunghezza d'onda λ (in maniera iterativa con la prima formula) ed infine si ricava la velocità di gruppo c_g . Poiché si parte di solito dai valori relativi all'alto fondale risultano molto utili i diagrammi mostrati nelle Fig. 5.10, Fig. 5.11 e Fig. 5.12. Il pedice "0" dei simboli individua i valori relativi all'alto fondale e la rappresentazione è costruita in questo modo:

- $\frac{\lambda}{\lambda_o} = f_1 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_o}\right)$ per la Fig. 5.2.10

- $\frac{c}{c_o} = f_2 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_o}\right)$ per la Fig. 5.2.11

- $\frac{c_g}{c_o} = f_3 \cdot \left(\frac{d}{\lambda_o}\right)$ per la Fig. 5.2.12

-

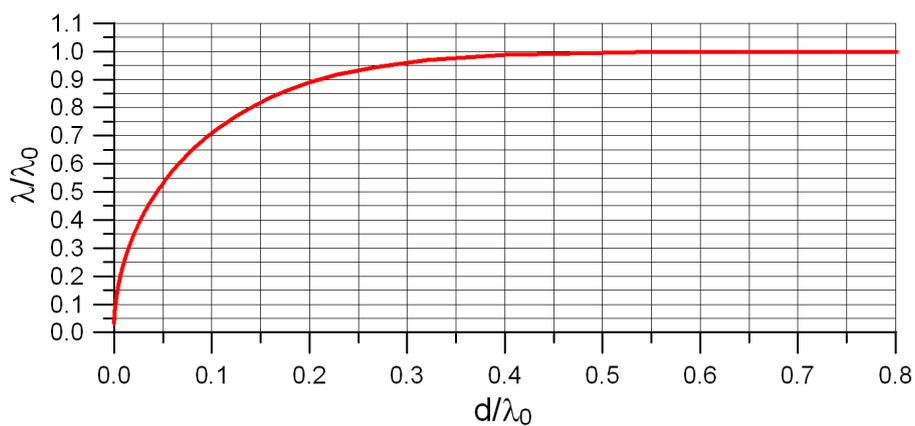


Fig. 5.2.10 – Lunghezza d'onda normalizzata in funzione del fondale relativo

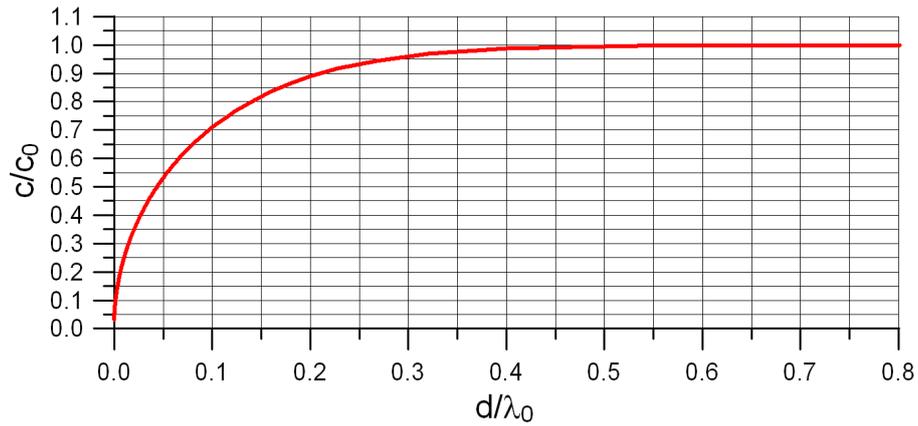


Fig. 5.2.11 – Celerità d'onda normalizzata in funzione del fondale relativo

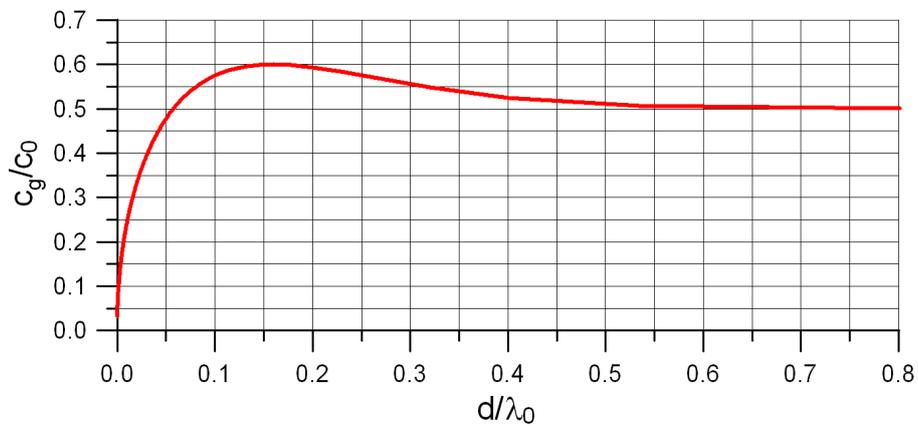


Fig. 5.2.12 – Velocità di gruppo normalizzata in funzione del fondale relativo

Le leggi individuate sopra indicano come variano i parametri “longitudinali” delle onde, nel senso di percorrenza delle stesse. Per quel che riguarda l’altezza d’onda, assumendo in primissima approssimazione che non vi siano cause dissipatrici e riflessione, il flusso di energia F si conserva cambiando fondale. Pertanto:

$$F = E \cdot c_g = \frac{1}{8} \rho g H_0^2 c_{g_0} = \frac{1}{8} \rho g H^2 c_g \quad (5.2.7)$$

ed in base a quanto sopra $c_g = c_0 \cdot f_3(\lambda/d)$ e quindi essendo anche $c_{g_0} = 0.5 \cdot c_0$

$$H_0^2 0.5 \cdot c_0 = H^2 c_0 \cdot f_3(\lambda/d) \quad (5.2.8)$$

$$\frac{H}{H_0} = \sqrt{\frac{0.5}{f_3(\lambda/d)}} = \sqrt{\frac{1}{\tanh(kd) \left(1 + \frac{2kd}{\sinh(2kd)}\right)}} = K_s = \text{shoaling coefficient} \quad (5.2.9)$$

e l'ultima espressione è diagrammata in Fig. 5.2.13 mentre in Fig. 5.2.14 è rappresentata la pendenza d'onda normalizzata.

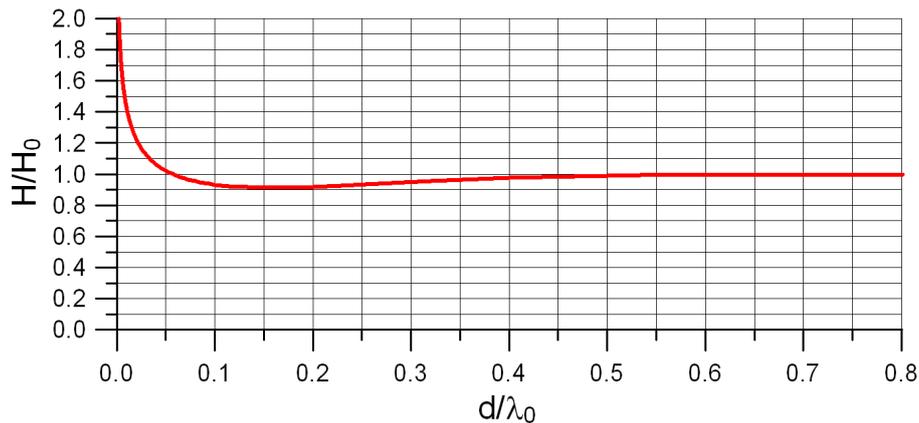


Fig. 5.2.13 – Altezza d'onda normalizzata (shoaling coeff.) in funzione del fondale relativo

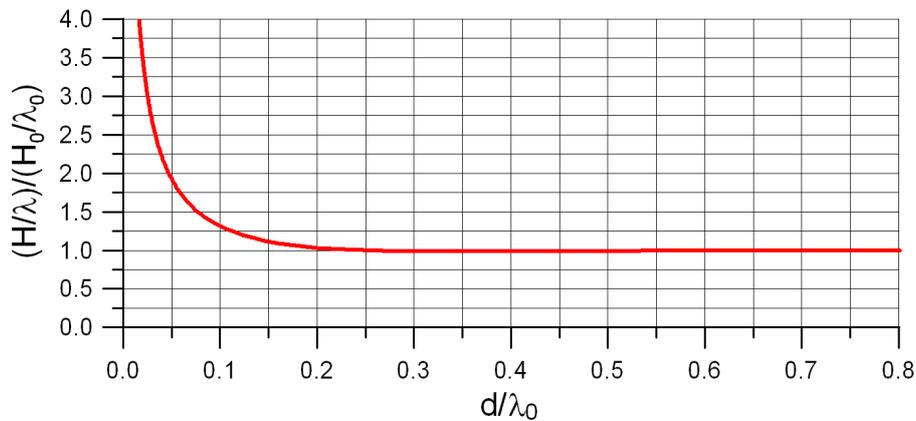


Fig. 5.2.14 – Pendenza d'onda normalizzata in funzione del fondale relativo

Ad es. se un treno d'onde in *deep water* ha pendenza H_0/λ_0 pari a $1/21$, quando la profondità del fondale è pari a circa 5% della lunghezza d'onda in *deep water*, l'onda ha una pendenza di circa 2 volte quella al largo e perciò è in avanzata fase di *breaking*. Sono calcoli puramente indicativi in quanto si è assunto che non vi siano cause dissipatrici tra cui lo stesso *breaking* ed il *bottom friction*.

Ricordando che

$$u(X, Y, t) = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega} \frac{\cosh[k(d+Y)]}{\cosh[kd]} \cos(kX - \omega t) \quad (5.2.10)$$

la max velocità orizzontale del flusso si ha per $Y=0$ e per $\cos(kX - \omega t) = 1$ e vale $u_{MAX} = \frac{H}{2} \frac{gk}{\omega}$

Per il deep water vale $u_{MAX_0} = \frac{H_0}{2} \frac{gk_0}{\omega}$ e quindi

$$\frac{u_{MAX}}{u_{MAX_0}} = \frac{H}{H_0} \frac{k}{k_0} = \frac{H/\lambda}{H_0/\lambda_0} \quad (5.2.11)$$

Tale aspetto risulta importante quando si valutano le forze indotte dalle onde sulle struttura marine e si è nella fase decisionale di disposizione della struttura rispetto alla costa.

E' chiaro però che tale modello matematico è decisamente debole in quanto basandosi sulla teoria lineare "consente" di ottenere onde arbitrariamente ripide mentre è noto che oltre determinate soglie di pendenza (*steepness*) le onde frangono.

Per ovviare a tale problema, in via semplificata si possono utilizzare degli schemi/diagrammi basati su dati sperimentali e valutazioni semiempiriche che danno semplici ma importanti indicazioni sul *breaking*, in particolare sulla tipologia e altezza del *breaker* e la profondità a cui si ha frangenza in funzione della morfologia del fondale.

In Fig. 5.2.15 è presentato un diagramma simile a quello di Fig. 5.2.13, ma riferito all'altezza d'onda significativa. H_0' sta per altezza d'onda significativa equivalente in deep water ed L_0 sta per la lunghezza d'onda riferita al periodo significativo $T_{1/3}$. L'altra differenza sostanziale con il precedente diagramma di Fig. 5.2.13 risiede nella presenza di diverse pendenze del fondale ($\tan(\theta)$) che in precedenza era stato assunto a pendenza così debole da essere sostanzialmente nulla e nella differenziazione del comportamento alla frangenza in funzione della pendenza dell'onda al largo.

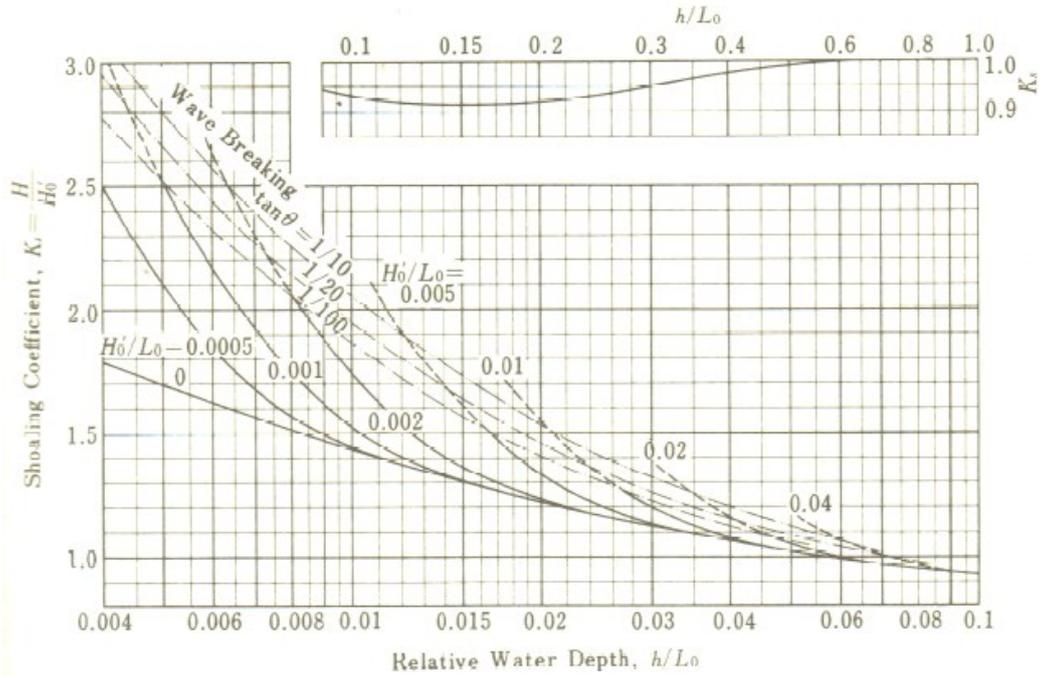


Fig. 5.2.15 [Goda, 1985]

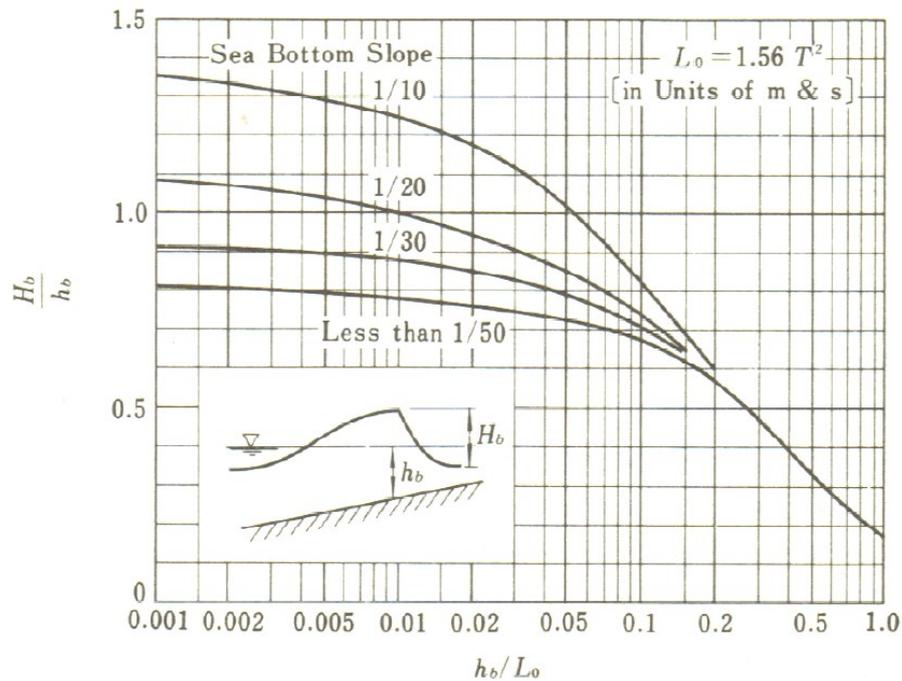


Fig. 5.2.16 [Goda, 1985]

In Fig. 5.2.16 è rappresentato un semplice digramma tratto da misure di laboratorio che consente di calcolare la max altezza del frangente H_b in funzione della profondità alla quale avverrà la frangenza e per vari valori della pendenza del fondale.

Da un'altra fonte, con riferimento alla simbologia di Fig. 5.2.17, in Fig. 5.2.18 è presentato un diagramma che permette, attraverso la conoscenza del rapporto H_0/T^2 dell'onda in alto fondale e

della pendenza del fondale secondo la direzione di propagazione delle onde, di risalire al rapporto H_b/H_0 dove H_b = altezza dell'onda frangente.

In Fig. 5.19, in funzione dello stesso rapporto H_0/T^2 che ricordiamo differisce a meno di una costante dal valore della pendenza dell'onda (infatti in alto fondale $\lambda = gT^2/2\pi$), si può risalire alla profondità d_b alla quale l'onda frange (ovvero il rapporto d_b/H_b dove d_b = distanza tra il mare calmo ed il fondo mentre H_b = altezza dell'onda frangente ricavato da Fig. 5.2.15).

Infine in Fig. 5.2.20 si può determinare il tipo di frangenza (spilling – plunging – surging) in funzione della pendenza del fondale e della pendenza dell'onda al largo in alto fondale.

Nella Fig. 5.2.21 sono rappresentati i tre schemi di breaking (Spilling – Plunging – Surging).

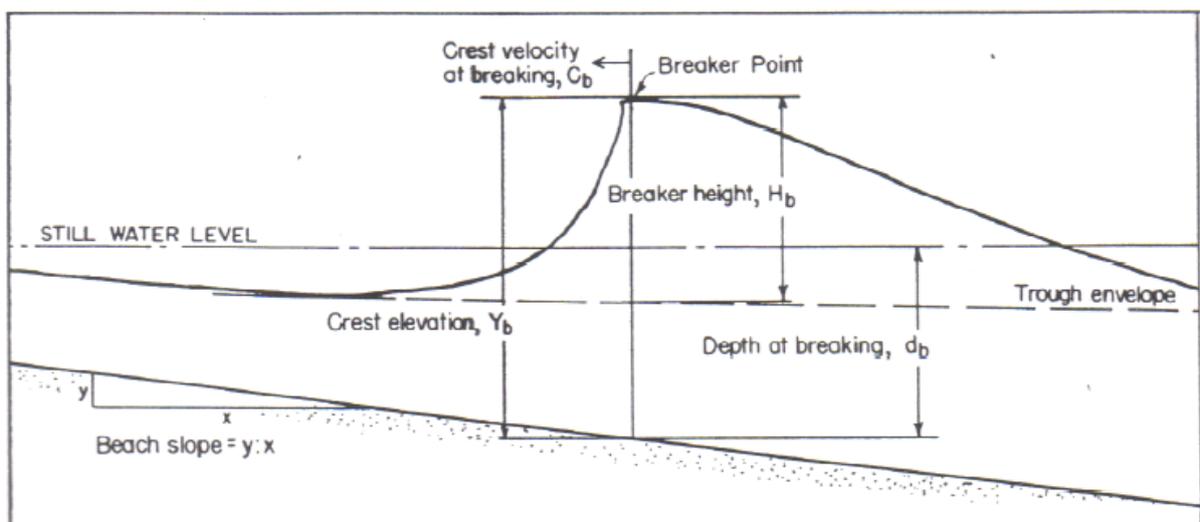


Fig. 5.2.17 [Wiegel, 1964]

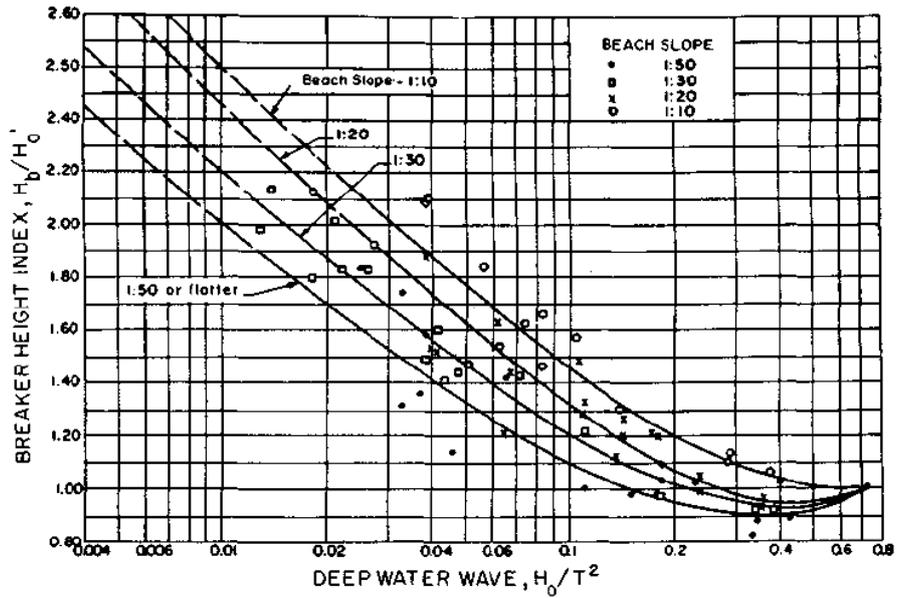


Fig. 5.2.18 [Wiegel, 1964]

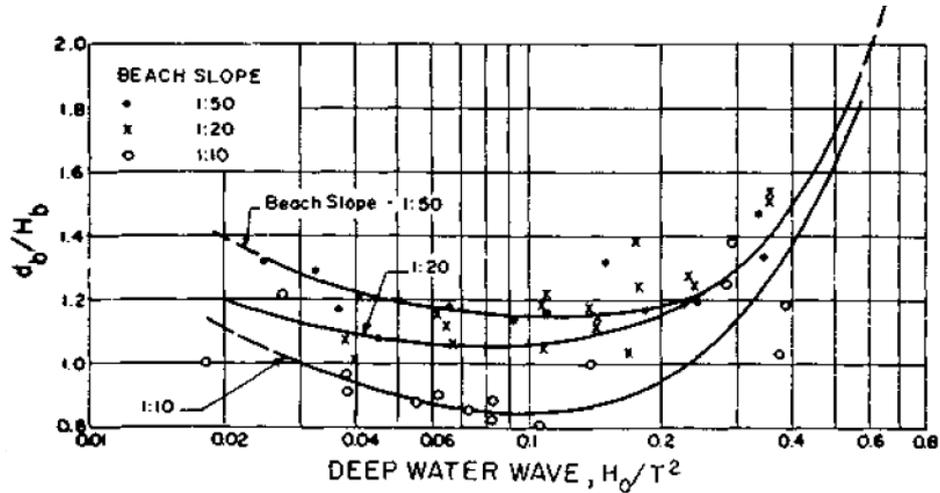


Fig. 5.2.19 [Wiegel, 1964]

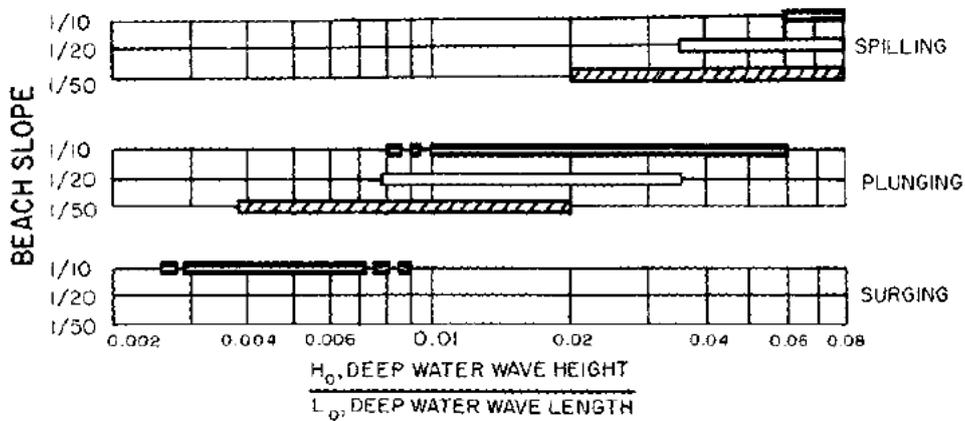
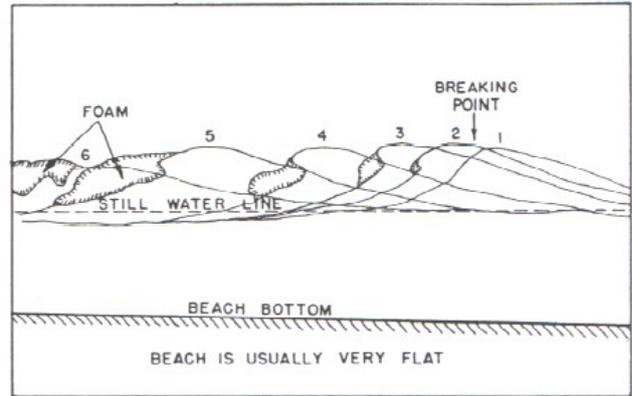
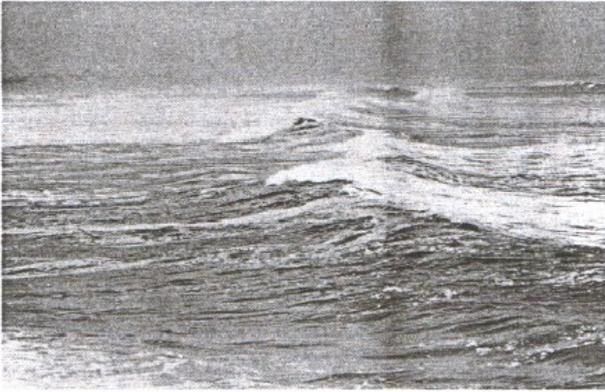
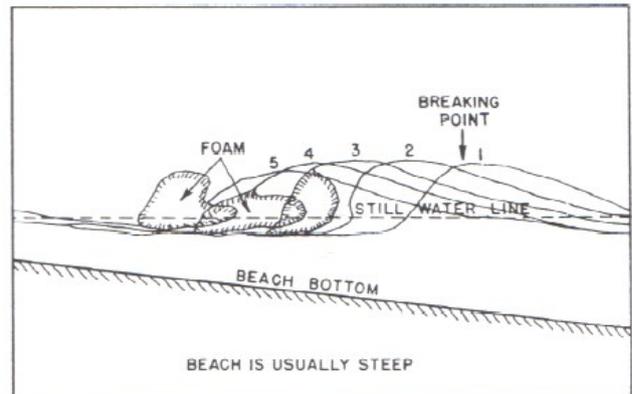
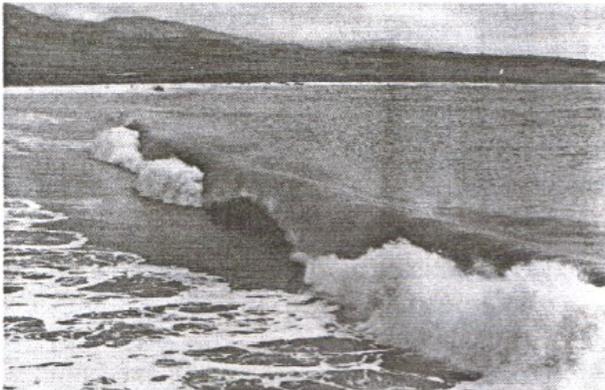


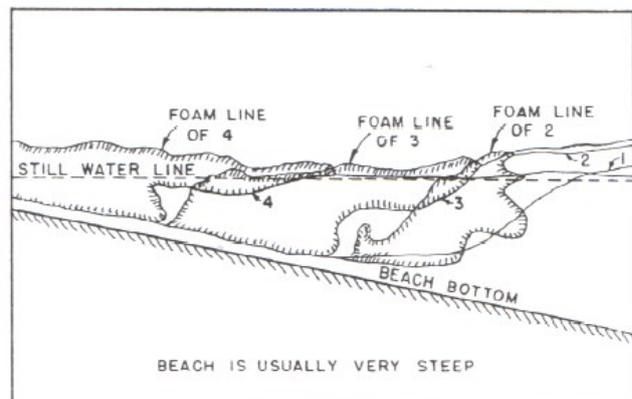
Fig. 5.2.20 [Wiegel, 1964]



Spilling breaker



Plunging breaker



Surging breaker

Fig. 5.2.21 [Wiegel, 1964]

In Fig. 5.2.22 sono mostrati due casi tratti da misure sperimentali in laboratorio sul campo cinematico sotto un onda frangente, in due casi caratterizzati da fondali con pendenze molto diverse.

Oggi giorno c'è un'ampia letteratura su misure LDV della cinematica dei breakers, anche quelli prodotti dalle navi a prua (in scala modello), pertanto questo vuole essere solo un esempio (non recentissimo) sulle differenze che ci sono nei vari casi.

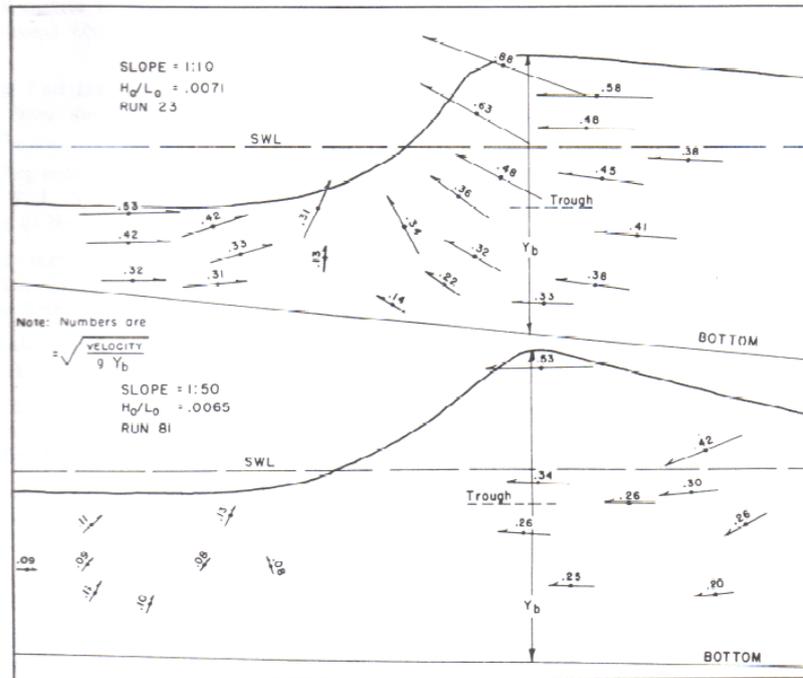


Fig. 5.2.22 [Wiegel, 1964]

C'è un ulteriore aspetto che riguarda il passaggio delle onde da alto a basso fondale ed è il fenomeno della RIFRAZIONE. La rifrazione è il fenomeno che riguarda i processi ondulatori in presenza di cambio di caratteristiche del mezzo di propagazione (il classico effetto del remo parzialmente immerso in acqua con cambio di direzione dell'immagine). Nel caso in esame la proprietà del mezzo di propagazione è rappresentata dalla profondità. Fig. 5.2.23 mostra una foto aerea in cui è ben visibile il cambio di direzione delle creste nell'avvicinamento alla linea di costa pur in assenza di barriere o altro.

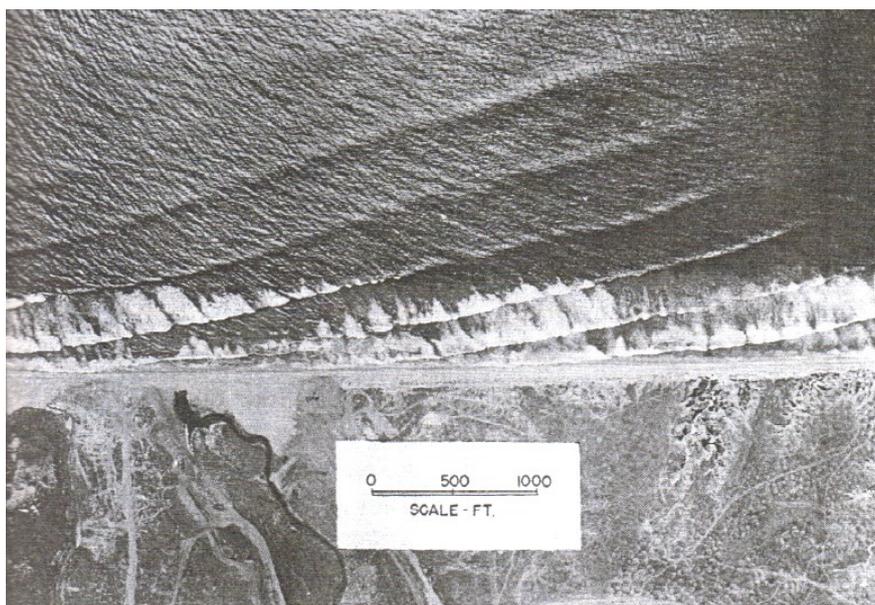


Fig. 5.2.23 [Wiegel, 1964]

Anche questo fenomeno è intrinsecamente incluso nei modelli matematici di cui alle Fig. 5.2.5-5.2.9. Qui ne viene data una trattazione semplificata.

Se un'onda di numero k si propaga secondo una direzione θ si può pensarla composta di due onde, rispettivamente con numeri d'onda $k_x = |\vec{k}| \cos \theta$ e $k_y = |\vec{k}| \sin \theta$ secondo lo schema di Fig. 5.2.24.

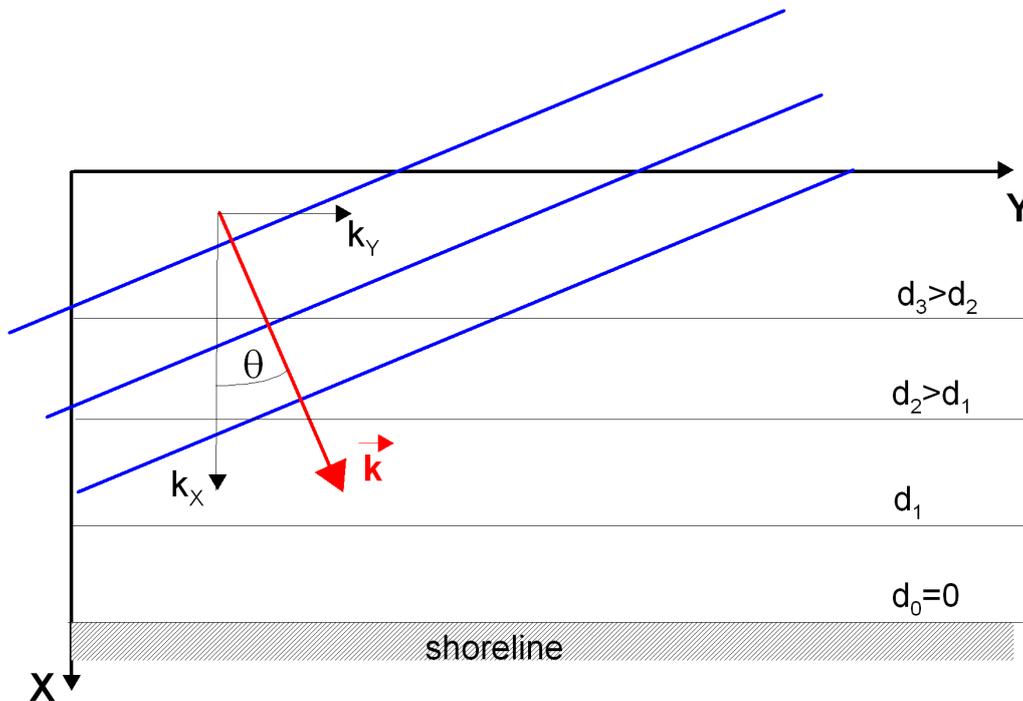


Fig. 5.2.24

Possiamo allora definire la variabile scalare $\Omega = k_x X + k_y Y - \omega t$.

Allora vale $\vec{k} = \nabla \Omega = (|\vec{k}| \cos \theta, |\vec{k}| \sin \theta, 0)$ ma per le proprietà dell'operatore ∇ vale anche $rot(\nabla \Omega) = \vec{0}$ e cioè

$$\frac{\partial}{\partial X} (|\vec{k}| \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial Y} (|\vec{k}| \cos \theta) = 0$$

L'equazione appena scritta lega il valore del numero d'onda $|\vec{k}|$ alla direzione di propagazione dell'onda θ . A sua volta però $|\vec{k}|$ è legato alla profondità.

Fig. 5.24 mostra il caso semplificato di un fondale a batimetrie parallele ed infinitamente estese.

In questo caso allora $\frac{\partial}{\partial Y} = 0$ e pertanto rimane che

$$\frac{\partial}{\partial X}(|\vec{k}| \sin \theta) - \frac{\partial}{\partial Y}(|\vec{k}| \cos \theta) = \frac{\partial}{\partial X}(|\vec{k}| \sin \theta) = 0 \quad (5.2.12)$$

e cioè

$$|\vec{k}| \sin \theta = \text{cost} \quad (5.2.13)$$

Ricordando però che $c = \frac{\lambda}{T} = \frac{\omega}{k}$ e ricordando anche che $\omega = \text{cost}$ nell'ambito della trattazione sin

qui seguita, allora $\frac{|\vec{k}|}{\omega} \sin \theta = \text{cost}$ e quindi

$$\frac{\sin \theta}{c} = \text{cost} \quad (\text{Legge di Snell dell'ottica}) \quad (5.2.14)$$

dove nel nostro $c = f(d)$ come da Fig. 5.11. Da notare che nel paragone con il caso ottico, la velocità di propagazione del fenomeno ondulatorio in questo caso viene a dipendere dal fondale che funge da proprietà del mezzo.

Pertanto se $d \rightarrow 0$, allora $c \rightarrow 0$ e quindi deve essere che $\sin \theta \rightarrow 0$ cioè le onde si dispongono con le linee delle creste parallele alle isobatimetriche (Fig. 5.2.25 - 5.2.26 - 5.2.8).

In generale il vettore numero d'onda percorre delle traiettorie ortogonali alle creste e tali traiettorie prendono il nome di "raggi". In letteratura si trova spesso questa trattazione con il nome della teoria dei raggi.

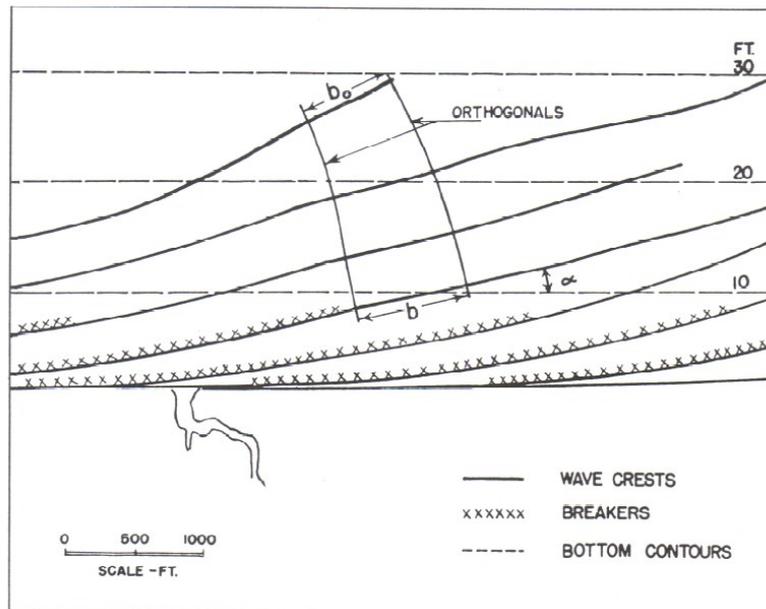


Fig. 5.2.25 - Disposizione di un treno d'onde vicino la costa da foto aerea
[Johnson, O'Brien and Isaacs, 1948]

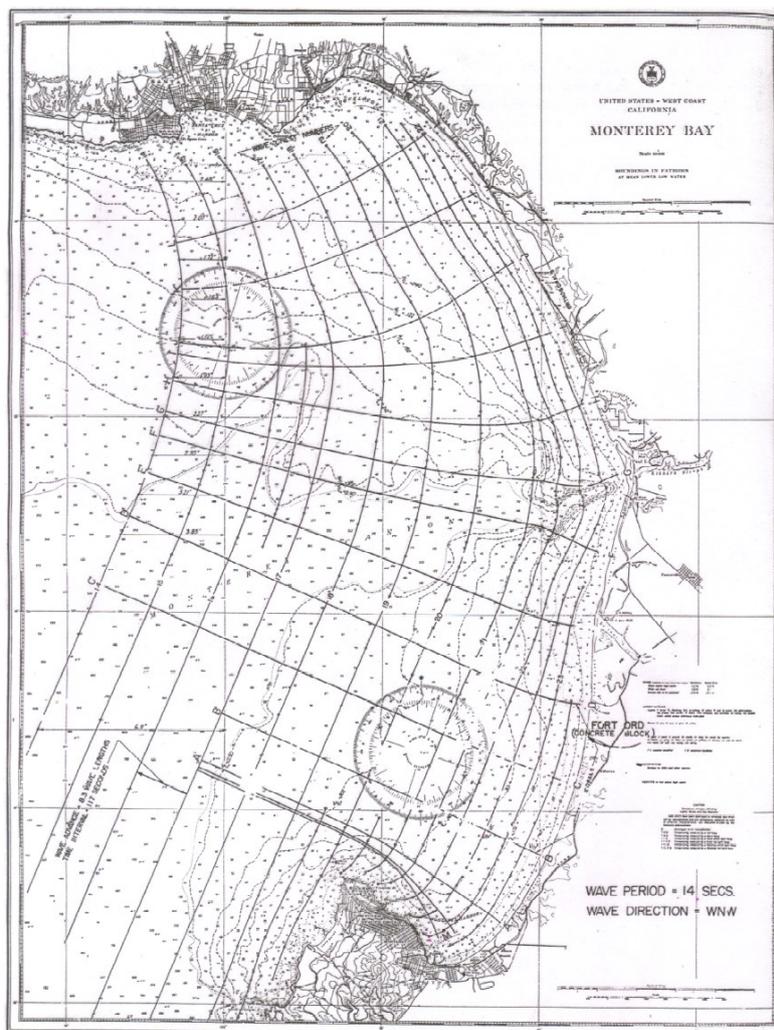


Fig. 5.2.26 – Applicazione della teoria dei raggi [Wiegel, 1964]

Per completezza, bisogna citare anche il fatto che il moto ondoso a costa è generalmente accompagnato da un innalzamento del livello medio, prodotto sia dal vento che dal moto ondoso stesso. Fig. 5.2.27 mostra alcuni dati per una pendenza del fondale pari a 1:100 e per varie steepness dell'onda incidente.

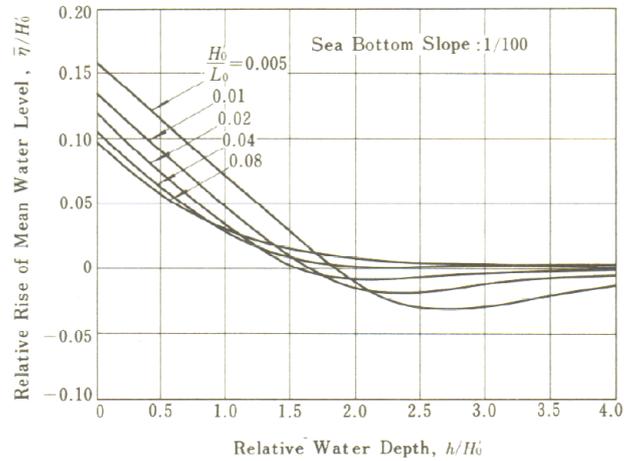


Fig. 5.2.27 – [Goda, 1985]

5.3 - GENERAZIONE E PROPAGAZIONE DELLE ONDE IN VASCA CHIUSA

Le vasche oceaniche e delle vasche navali con ondogeno sono ancor oggi uno strumento indispensabile per lo studio del comportamento su onda di navi, strutture offshore fisse, galleggianti e ormeggiate, specie in fase di verifica del progetto condotto sino a quel momento con soli strumenti computazionali. Per questo motivo è indispensabile conoscere le problematiche di questi laboratori con particolare riguardo alla qualità delle onde prodotte rispetto al target. In questo paragrafo si esamineranno due aspetti: la parziale riflessione delle onde da parte di assorbitori (spiagge) e la generazione delle onde stesse tramite ondogeno.

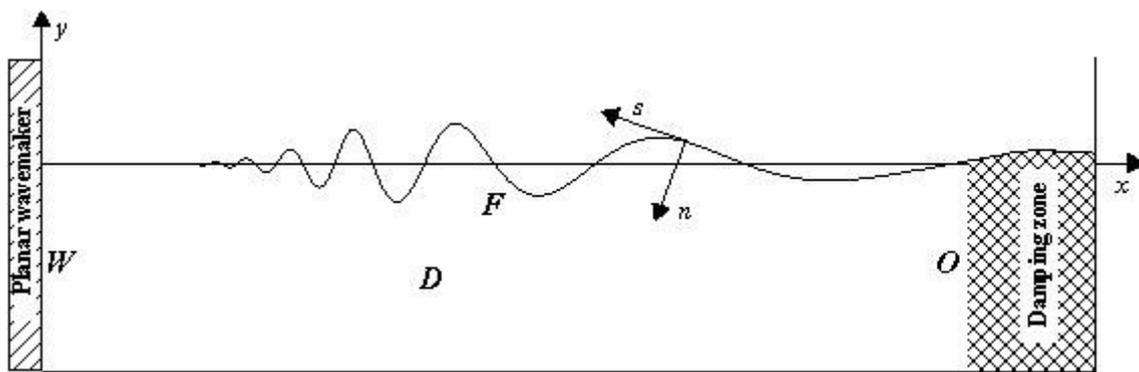


Fig. 5.3.1

5.3.1 LE ONDE PARZIALMENTE STAZIONARIE COME RISULTATO DI UNA PARZIALE RIFLESSIONE DA UN ASSORBITORE D'ONDA

Prendiamo in esame il caso in cui si sovrappongono due onde piane progressive, aventi la stessa lunghezza (periodo), altezze diverse e direzioni opposte. Questa situazione coincide con quella ottenuta da una riflessione parziale su un assorbitore imperfetto di un'onda piana progressiva che viaggia all'interno di una vasca. Si assume valida la sovrapposizione degli effetti.

Le due onde sono rispettivamente le seguenti (I = incidente; R = riflessa):

$$\eta_I = \frac{H_I}{2} \cos(kX - \omega t)$$

$$\eta_R = \frac{H_R}{2} \cos(kX + \omega t + \varepsilon) \quad (5.3.1.1)$$

$$\eta_{TOT}(X, t) = \eta_I + \eta_R = \frac{H_I}{2} \cos(kX - \omega t) + \frac{H_R}{2} \cos(kX + \omega t + \varepsilon)$$

ε è una fase che in qualche modo tiene conto del fatto che la riflessione non avviene necessariamente ad una ascissa ben precisa.

Rielaborando con la trigonometria, otteniamo:

$$\eta_{TOT}(X,t) = \frac{H_I}{2} [\cos(kX)\cos(\omega t) + \sin(kX)\sin(\omega t)] + \frac{H_R}{2} [\cos(kX + \varepsilon)\cos(\omega t) - \sin(kX + \varepsilon)\sin(\omega t)] \quad (5.3.1.2)$$

e raggruppando

$$\eta_{TOT}(X,t) = \left[\frac{H_I}{2} \cos(kX) + \frac{H_R}{2} \cos(kX + \varepsilon) \right] \cos(\omega t) + \left[\frac{H_I}{2} \sin(kX) - \frac{H_R}{2} \sin(kX + \varepsilon) \right] \sin(\omega t) \quad (5.3.1.3)$$

che possiamo scrivere anche così

$$\boxed{\eta_{TOT}(X,t) = I(X)\cos(\omega t) + F(X)\sin(\omega t)} \quad (5.3.1.4)$$

dove

$$I(X) = \frac{H_I}{2} \cos(kX) + \frac{H_R}{2} \cos(kX + \varepsilon) \quad F(X) = \frac{H_I}{2} \sin(kX) - \frac{H_R}{2} \sin(kX + \varepsilon) \quad (5.3.1.5)$$

$\eta_{TOT}(X,t)$ dunque è la somma di due onde stazionarie pure in cui l'ampiezza è modulata in X secondo $I(X)$ ed $F(X)$.

Per analizzare che forma ha quest'onda composta, andiamo a determinarne i massimi/minimi nel tempo, per ciascuna posizione X .

$$\boxed{\frac{\partial \eta_{TOT}(X,t)}{\partial t} = -I(X) \cdot \omega \cdot \sin(\omega t) + F(X) \cdot \omega \cdot \cos(\omega t) = 0} \quad (5.3.1.6)$$

La soluzione di questa equazione si ottiene quando t è tale da soddisfare le seguenti condizioni:

$$\tan(\omega t) \Big|_{max,min} = \frac{F(X)}{I(X)} \quad (5.3.1.7)$$

o equivalentemente

$$\cos(\omega t)|_{max,min} = \frac{I(X)}{\sqrt{I(X)^2 + F(X)^2}}, \quad \sin(\omega t)|_{max,min} = \frac{F(X)}{\sqrt{I(X)^2 + F(X)^2}} \quad (5.3.1.8)$$

e sostituendo in $\eta_{TOT}(X, t)$, trattandosi dei massimi e minimi quindi dell'ampiezza, si ottiene:

$$\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{2} = \frac{I(X)^2 + F(X)^2}{\sqrt{I(X)^2 + F(X)^2}} = \pm \sqrt{I(X)^2 + F(X)^2} \quad (5.3.1.9)$$

$$\boxed{\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{2} = \pm \sqrt{\left(\frac{H_I}{2}\right)^2 + \left(\frac{H_R}{2}\right)^2 + \frac{H_I H_R}{2} \cos(2kX + \varepsilon)}} \quad (5.3.1.10)$$

La Fig. 5.3.1.1 mostra il caso in cui $H_I=1$, $H_R=0.1$.

La Fig. 5.3.1.2 mostra il caso in cui $H_I=1$, $H_R=0.3$.

La Fig. 5.3.1.3 mostra il caso in cui $H_I=1$, $H_R=1.0$.

Ciò che si nota è che $\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{2}$ è modulata lungo X e presenta esattamente due cicli nello spazio per ogni lunghezza pari a λ , come del resto è evidente dal raddoppio del numero d'onda nella espressione sopra. Nel caso di Fig. 5.3.1.3 esistono dei punti in cui $\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{2} = 0$ e sono i nodi delle onde stazionarie che si sono create dalla riflessione totale $H_R = H_I$.

Le due curve rosse di Fig. 5.3.1.1-5.3.1.3, quella positiva e quella negativa, rappresentano l'involuppo del luogo delle creste e dei cavi rispettivamente dell'onda complessiva e cioè all'avanzare del tempo si vedranno le creste cambiare localmente di ampiezza secondo l'involuppo detto. All'aumentare dell'ampiezza dell'onda riflessa, tale fenomeno è sempre più marcato sino a portarsi al caso di onda puramente stazionaria a nodi fissi di Fig. 5.3.1.3. Negli altri casi si parla di onde parzialmente stazionarie (partially standing waves).

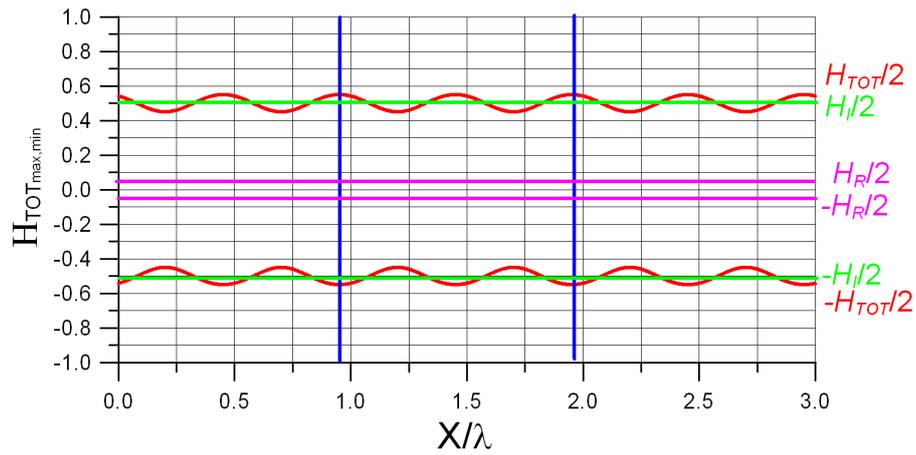


Fig. 5.3.1.1

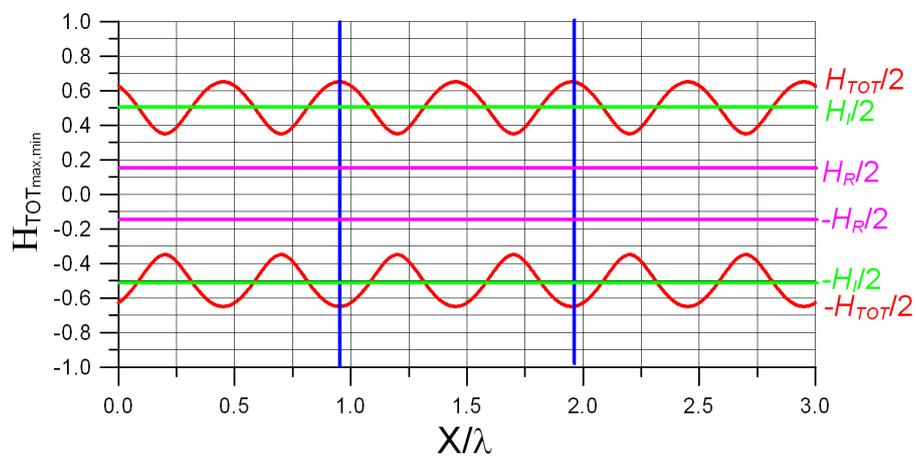


Fig. 5.3.1.2

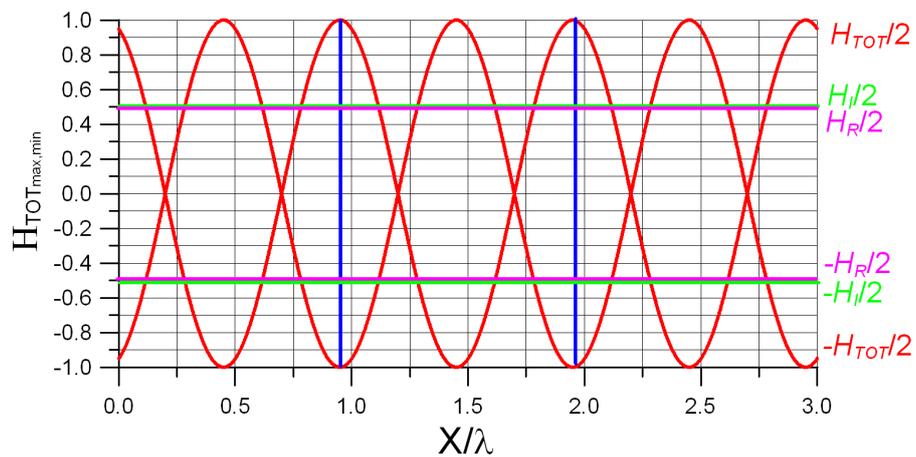


Fig. 5.3.1.3

Analizzando, si ha che:

- i massimi dell'involuppo dei massimi (o dei minimi) avvengono per $\cos(2kX_1 + \varepsilon) = 1$ cioè $2kX_1 + \varepsilon = 2\pi n$ con $n=0,1,2$

- i minimi dell'involuppo dei massimi (o dei minimi) avvengono per $\cos(2kX_2 + \varepsilon) = -1$ cioè $2kX_2 + \varepsilon = 2\pi n + \pi = (2n+1)\pi$ con $n=0,1,2$
- la distanza tra un massimo ed un minimo contigui dell'involuppo dei massimi (o dei minimi) è data da $X_2 - X_1 = \frac{(2n+1)\pi}{2k} - \frac{2n\pi}{2k} = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}$

Pertanto una intera modulazione dell'ampiezza dell'onda totale avviene in uno spazio pari a $\frac{\lambda}{2}$.

Il coefficiente di riflessione è definito come $C_R = \frac{H_R}{H_I}$ e sostituendolo nell'equazione per

$\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{2}$ si ottiene:

$$\boxed{\frac{H_{TOT}(X)|_{max,min}}{\frac{2}{H_I}} = \pm \sqrt{1 + C_R^2 + 2C_R \cos(2kX + \varepsilon)}} \quad (5.3.1.11)$$

Se in laboratorio si esegue una serie di misure dell'elevazione d'onda mirate ad individuare le posizioni X_1 ed X_2 , quindi muovendo con cura e molto lentamente la sonda lungo la vasca fintanto che l'altezza misurata (in valore assoluto) non assume il valore massimo e minimo rispettivamente, allora individuate le posizioni e misurate $H_{TOT}(X_1)|_{max}$ ed $H_{TOT}(X_2)|_{min}$ si ha

$$\frac{H_{TOT}(X_1)|_{max}}{\frac{2}{H_I}} = \sqrt{1 + C_R^2 + 2C_R} = 1 + C_R \quad (\text{calcolato sulla base delle misure}) \quad (5.3.1.12)$$

$$\frac{H_{TOT}(X_2)|_{min}}{\frac{2}{H_I}} = \sqrt{1 + C_R^2 - 2C_R} = 1 - C_R \quad (\text{calcolato sulla base delle misure}) \quad (5.3.1.13)$$

Nota H_I e misurate $H_{TOT}(X_1)|_{max}$ ed $H_{TOT}(X_2)|_{min}$ si possono calcolare $(1+C_R)$ ed $(1-C_R)$.

Sottraendo i due valori trovati, il risultato deve essere anche pari a $(1+C_R) - (1-C_R) = 2C_R$ e quindi dalla misura di $H_{TOT}(X_1)|_{max}$ ed $H_{TOT}(X_2)|_{min}$ si perviene a

$$C_R = \frac{1}{2} \left[\frac{\frac{H_{TOT}(X_1)|_{max}}{2}}{\frac{H_I}{2}} - \frac{\frac{H_{TOT}(X_2)|_{min}}{2}}{\frac{H_I}{2}} \right] = \frac{1}{2} \left[\frac{H_{TOT}(X_1)|_{max} - H_{TOT}(X_2)|_{min}}{H_I} \right] \quad (5.3.1.14)$$

Sommando invece i due valori trovati

$$(1 + C_R) + (1 - C_R) = 2 = \frac{H_{TOT}(X_1)|_{max}}{\frac{H_I}{2}} + \frac{H_{TOT}(X_2)|_{min}}{\frac{H_I}{2}} \quad (5.3.1.15)$$

Si ottiene

$$2H_I = H_{TOT}(X_1)|_{max} + H_{TOT}(X_2)|_{min} \quad (5.3.1.16)$$

Allora

$$C_R = \left[\frac{H_{TOT}(X_1)|_{max} - H_{TOT}(X_2)|_{min}}{H_{TOT}(X_1)|_{max} + H_{TOT}(X_2)|_{min}} \right] \quad (5.3.1.17)$$

Tale espressione risulta particolarmente utile nella determinazione del coefficiente di riflessione in quanto prescinde dalla conoscenza del valore esatto dell'altezza d'onda incidente.

Da notare che il valore di C_R dipende fortemente dalla lunghezza d'onda in quanto gli assorbitori utilizzati in vasca si comportano diversamente nei confronti di onde più o meno lunghe. La dipendenza dalla altezza d'onda a parità di lunghezza d'onda è invece di solito trascurabile. Quindi ciò che si fa è analizzare tutte le frequenze possibili generabili con l'ondogeno per ottenere $C_R = f(\omega)$. Generalmente questa funzione è decrescente tendente a zero al crescere di ω e tende invece ad 1 per valori bassi di ω .

In conclusione, per avere una stima del C_R , poiché è necessario valutare i massimi $H_{TOT}(X_1)|_{max}$ ed i minimi $H_{TOT}(X_2)|_{min}$ dell'involuppo, non sapendo esattamente quali sono le coordinate X_1 e X_2 , bisogna effettuare numerose misure e ricostruire l'involuppo, perlomeno su un tratto di lunghezza almeno $\lambda/2$, visto che un max ed un min adiacenti distano di $\lambda/4$.

5.3.2 TEORIA DELL'ONDOGENO PIANO PER ONDE DI PICCOLA AMPIEZZA

In Fig. 5.3.2.1 sono presentati alcuni possibili tipi di ondogeno piano. Gli ondogeni che generano onde 3D o 2D con direzione diversa da quella perpendicolare alla parte dell'ondogeno stesso sono in realtà array di ondogeni piani comandati con una certa fase tra di loro per produrre le onde dette.

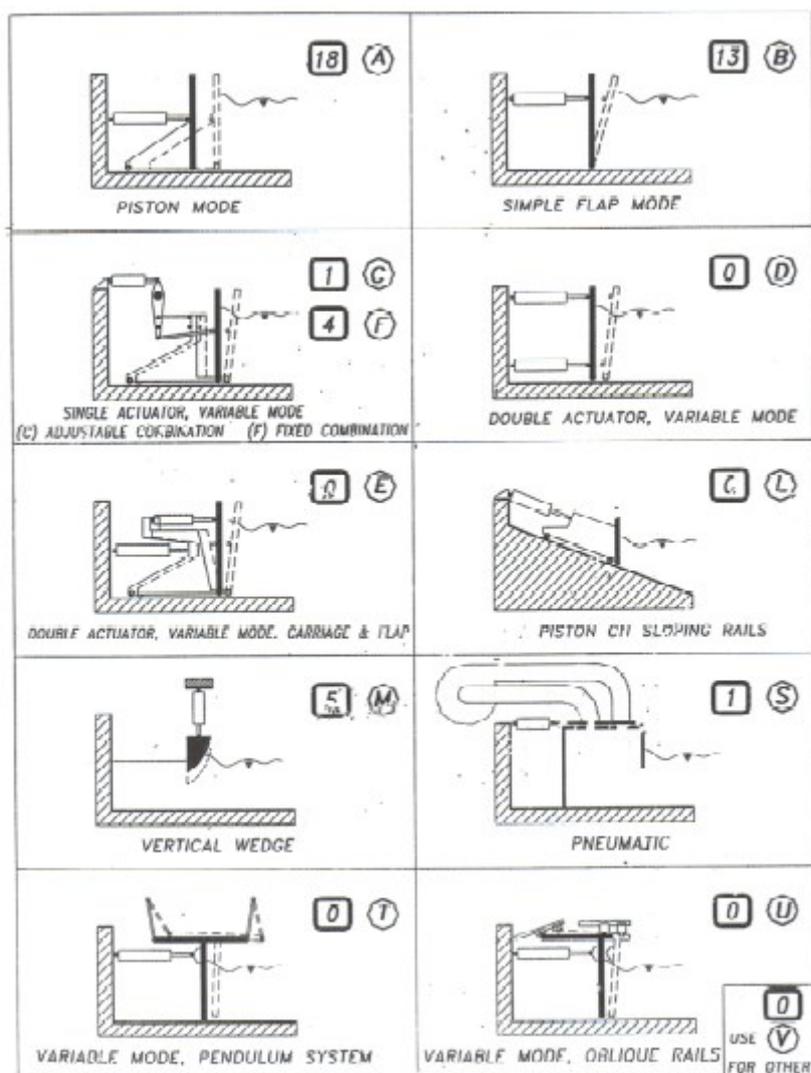


Fig. 5.3.2.1

Nella trattazione seguente ci si occuperà essenzialmente degli ondogeni piani di tipo a pistone e del tipo a flap in quanto per questi esistono soluzioni analitiche del problema fluidodinamico della *radiazione d'onda* e da queste soluzioni è possibile trarre molteplici conclusioni.

Dal punto di vista fisico si tratta di un problema di radiazione d'onda ovvero della generazione di onde da parte di un oggetto che si muove in modo alternato in prossimità della superficie libera con onde che si “allontanano” dall'oggetto stesso (*outgoing waves*). Nel caso il moto dell'ondogeno sia di ampiezza e frequenza tali da non dar luogo a depressioni per cui si verifica l'aerazione

dell'ondogeno stesso, si può con ottima approssimazione ritenere gli effetti viscosi trascurabili. La soluzione del problema è data dalla soluzione del B.V.P. (*Boundary Value Problem*) nel potenziale di velocità ϕ con opportune condizioni al contorno discusse di seguito.

Nel caso si adotti un ondogeno di tipo piano (pistone o flap incernierato sul fondo), esistono soluzioni analitiche del BVP purchè le onde generate siano di piccola ampiezza e cioè si linearizzino le condizioni KBC e DBC di superficie libera.

Fig. 5.3.2.2 ripropone il BVP di Airy ed il BVP del problema dell'ondogeno piano (pistone o flap).

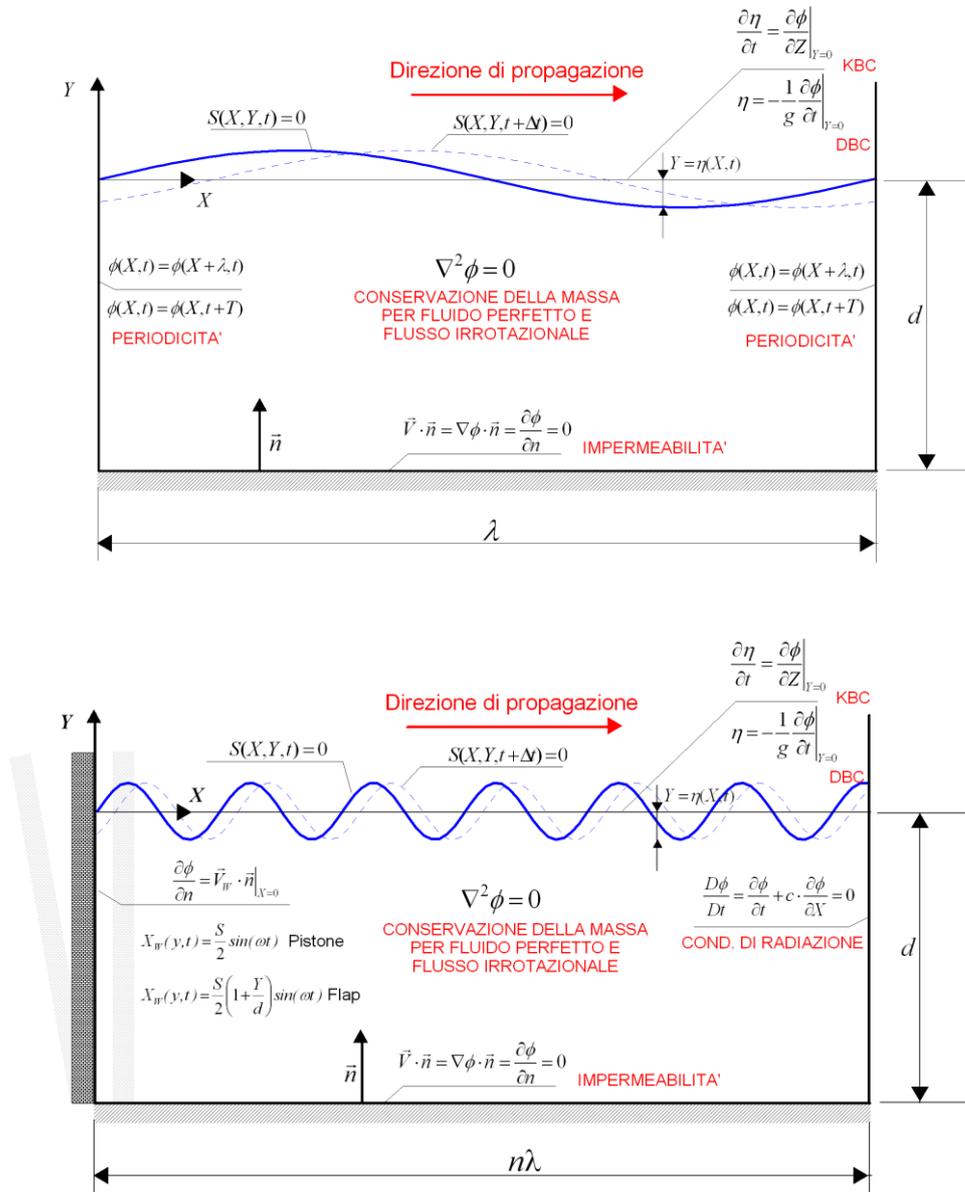


Fig. 5.3.2.2

Le differenze tra i due BVP sono nella lunghezza del dominio e soprattutto nelle condizioni al contorno sulle pareti verticali. Nel caso di Airy, le condizioni dette sono di periodicità per ϕ .

Per quel che concerne la parete detta ondogeno, è da osservare subito che sia nel caso del pistone che in quello del flap lo spostamento della parete dell'ondogeno deve ritenersi di piccola ampiezza (linearizzazione) al punto che la condizione al contorno è applicata sulla posizione media della parete stessa, vale a dire ($X=0$), pena la non disponibilità di soluzioni analitiche.

Le leggi del moto della parete dell'ondogeno sono nei due casi:

- Pistone $\rightarrow X_w(Y,t) = \frac{S}{2} \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \vec{V}_w = (\dot{X}_w, 0) = \left(\frac{S}{2} \omega \cos(\omega t), 0 \right)$
- Flap $\rightarrow X_w(Y,t) = \frac{S}{2} \left(1 + \frac{Y}{d} \right) \sin(\omega t) \quad \rightarrow \quad \vec{V}_w = (\dot{X}_w, 0) = \left(\frac{S}{2} \left(1 + \frac{Y}{d} \right) \omega \cos(\omega t), 0 \right)$

pertanto la condizione al contorno nel potenziale di velocità sull'ondogeno sarà come segue

$$\frac{\partial \phi}{\partial n} = \vec{V}_w \cdot \vec{n} \Big|_{X=0} \quad (5.3.2.1)$$

Per quanto riguarda invece la parete opposta all'ondogeno, su tale pezzo del contorno si deve applicare una condizione che renda tale parete invisibile al fluido ovvero una condizione di radiazione. Tale condizione per il potenziale ϕ deve esprimere la non variazione di ϕ "trasportato" attraverso la parete alla velocità data dalla celerità. Si tratta perciò di una "derivata totale" in cui la velocità di trascinamento è appunto la celerità

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + c \cdot \frac{\partial \phi}{\partial X} = 0 \Big|_{X \rightarrow \infty} \quad (5.3.2.2)$$

Si può dimostrare (Dean-Dalrymple) che la soluzione rispetto a $\phi(X, Y, t)$ del B.V.P. è data da:

$$\phi(X, Y, t) = A_p \cdot \cosh[k_p \cdot (Y + d)] \cdot \sin(k_p X - \omega t) + c \cdot e^{-k_s X} \cdot \cos[k_s \cdot (Y + d)] \cos(\omega t) \quad (5.3.2.3)$$

Il primo membro del RHS rappresenta a meno della costante A_p il potenziale di un'onda piana progressiva con $k_p =$ numero d'onda progressiva (soddisfa la relazione di dispersione) ed $\omega =$ frequenza ondogeno.

Il secondo membro del RHS (non presente nella soluzione del BVP di Airy) rappresenta un'onda stazionaria agganciata all'ondogeno, che decade in ampiezza esponenzialmente con X e che ha un andamento cosinusoidale con Y .

Il pedice P indica l'onda progressiva mentre il pedice S quella stazionaria.

Fissata che sia la frequenza ω del moto dell'ondogeno, valgono le seguenti due relazioni:

- $\omega^2 = g \cdot k_p \cdot \tanh(k_p d)$ onda progressiva
- $\omega^2 = -g \cdot k_s \cdot \tan(k_s d)$ onda stazionaria (evanescent modes)

La prima non è nient'altro che la relazione di dispersione che, assegnata ω , porta ad una sola soluzione per k_p .

La seconda correla invece ω con k_s ma una semplice analisi mostra che esistono infinite soluzioni di questa equazione e cioè infiniti valori di k_s che la soddisfano. Rielaborandola si ottiene infatti:

$$\frac{\omega^2 \cdot d}{g \cdot (k_s d)} = -\tan(k_s d) \quad (5.3.2.4)$$

In Fig. 5.34 è presentato il metodo grafico per individuare le soluzioni dell'equazione. La curva in rosso è la funzione $f_1(k_s d) = \frac{\omega^2 \cdot d}{g \cdot (k_s d)}$ mentre le curve in blu sono la funzione $f_2(k_s d) = -\tan(k_s d)$ dove la ricerca è per i valori di $k_s d$ che soddisfano $f_1(k_s d) = f_2(k_s d)$. Come si vede ci sono infinite soluzioni $k_s d$ e si vede anche che il valore limite più basso della soluzione è pari a $k_s d = \frac{\pi}{2}$.

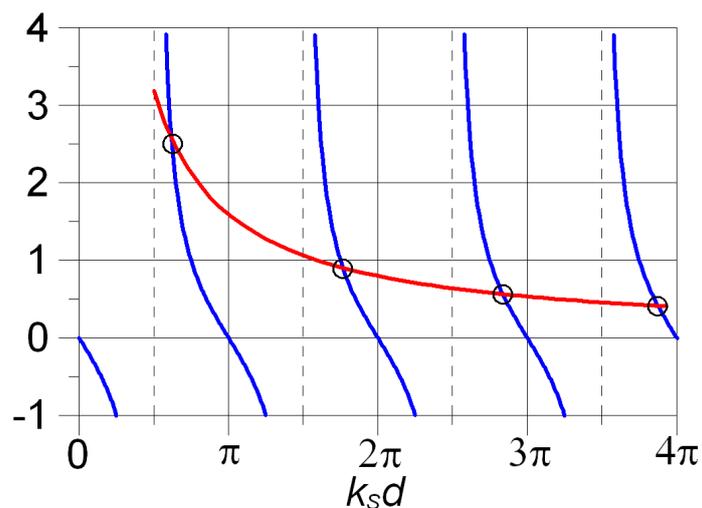


Fig. 5.3.2.1

Appurato che ci sono infinite soluzioni che soddisfano la relazione $\omega^2 = -g \cdot k_s \cdot \tan(k_s d)$, si può pensare di riscrivere l'equazione per $\phi(X, Y, t)$ nel seguente modo:

$$\phi(X, Y, t) = A_p \cdot \cosh[k_p \cdot (Y + d)] \cdot \sin(k_p X - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-k_{s_n} X} \cdot \cos[k_{s_n} \cdot (Y + d)] \cos(\omega t) \quad (5.3.2.5)$$

Dalle condizioni al contorno sull'ondogeno si ottengono i valori di A_p e c_n come segue:

$$A_p = \frac{- \int_{-d}^0 \frac{S(Y)}{2} \omega \cosh[k_p(Y + d)] dY}{k_p \int_{-d}^0 \cosh^2[k_p(Y + d)] dY} \quad (5.3.2.6)$$

$$c_n = \frac{\int_{-d}^0 \frac{S(Y)}{2} \omega \cos[k_{s_n}(Y + d)] dY}{k_{s_n} \int_{-d}^0 \cos^2[k_{s_n}(Y + d)] dY} \quad (5.3.2.7)$$

dove

$$S(Y) = \begin{cases} S & \text{pistone} \\ S \left(1 + \frac{Y}{d}\right) & \text{flap} \end{cases} \quad (5.3.2.8)$$

Sostituendo e ricordando che allontanandosi dall'ondogeno l'onda che si vuole ottenere deve soddisfare i requisiti di onda piana progressiva

$$\eta(X, t) = - \frac{1}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \Big|_{Y=0} = - \frac{A_p}{g} \cdot \omega \cdot \cosh[k_p \cdot (Y + d)] \cdot \cos(k_p X - \omega t) = \frac{H}{2} \cos(k_p X - \omega t) \quad (5.3.2.9)$$

si ottiene nei due casi (Fig. 4.3.2.2)

$$\frac{H}{S} = \frac{2(\cosh(2k_p d) - 1)}{\sinh(2k_p d) + 2k_p d} \quad \text{pistone} \quad (5.3.2.10)$$

$$\frac{H}{S} = 4 \left(\frac{\sinh(k_p d)}{k_p d} \right) \frac{k_p d \cdot \sinh(k_p d) - \cosh(k_p d) + 1}{\sinh(2k_p d) + 2k_p d} \quad \text{flap} \quad (5.3.2.11)$$

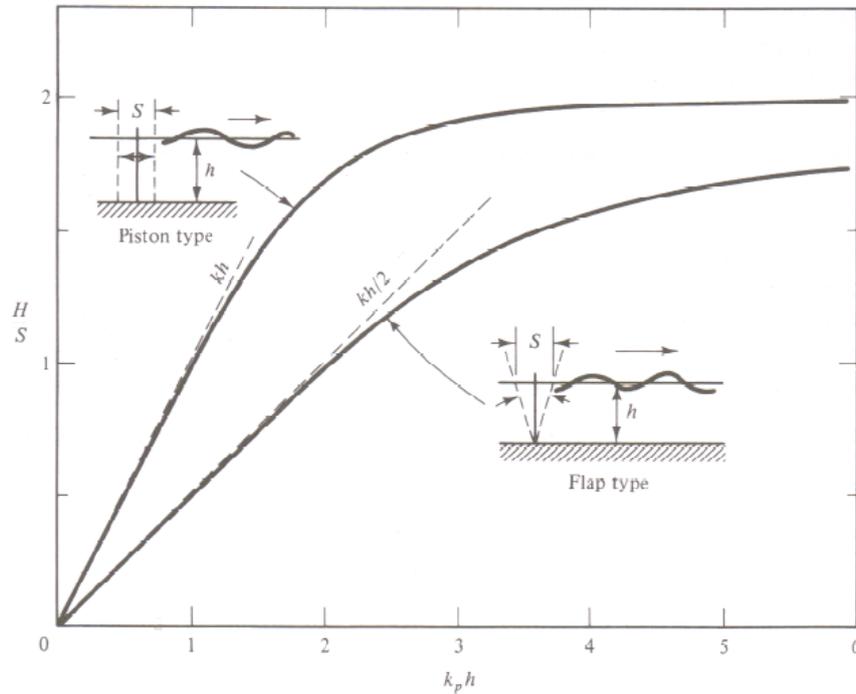


Fig. 5.3.2.2

In Fig. 4.3.2.3 è indicata la potenza assorbita dall'ondogeno in termini adimensionali, nei due casi. La potenza istantanea, per unità di spessore, la si ottiene molto semplicemente dalla relazione

$$P(t) = \int_{-d}^0 p(Y,t) \cdot \dot{X}(Y,t) dY \quad (5.3.2.12)$$

Il valore medio lo si ottiene da

$$\bar{P} = \bar{E} \cdot c_g \quad (5.3.2.13)$$

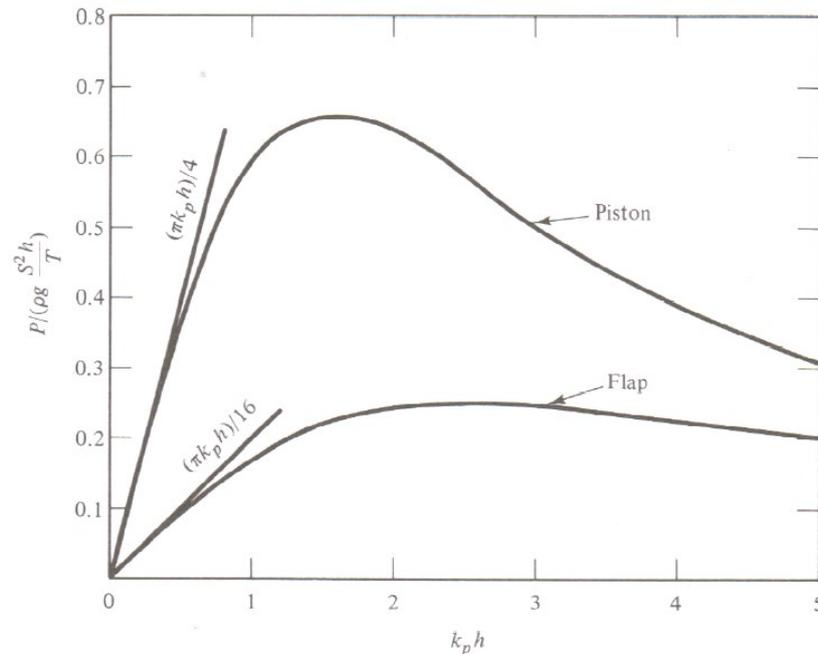


Fig. 5.3.2.3

Dalla Fig. 5.3.2.2 si vede facilmente che in *shallow waters*, a parità di altezza d'onda voluta, conviene operare con un ondogeno a pistone.

Ad es. per $k_p d = 0.5$ si ha che $\frac{H}{S} \approx 0.25$ per il flap ed $\frac{H}{S} \approx 0.50$ per il pistone e quindi a parità di H , $S=4 \cdot H$ per il flap ed $S=2 \cdot H$ per il pistone mentre la potenza assoluta assorbita per generare l'onda piana progressiva risulta ovviamente la stessa.

Il motivo di tali differenze è abbastanza semplice e risiede nel fatto che l'ondogeno a pistone ha una cinematica in senso orizzontale che è molto prossima a quella delle particelle di fluido in shallow water e quindi il movimento da imprimere è già molto vicino al risultato finale.

L'altro aspetto che riguarda il funzionamento dell'ondogeno, sono le onde "stazionarie" (modi evanescenti) e cioè il secondo termine del RHS della soluzione del BVP.

$$\phi(X, Y, t) = A_p \cdot \cosh[k_p \cdot (Y + d)] \cdot \sin(k_p X - \omega t) + \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cdot e^{-k_{s_n} X} \cdot \cos[k_{s_n} \cdot (Y + d)] \cos(\omega t) \quad (5.3.2.14)$$

Come si vede dall'equazione, si tratta di un potenziale che decade esponenzialmente con X , oscilla nel tempo alla stessa frequenza dell'ondogeno e varia verticalmente in modo cosinusoidale.

La ragione della nascita di questo "disturbo" risiede nel fatto che la parete dell'ondogeno si muove con un moto che non corrisponde a quello del fluido in situazione stabilizzata (onde di Airy),

pertanto c'è una zona nello spazio vicino all'ondogeno in cui il fluido passa dal moto forzato dalla parete a quello di "far field" e cioè di onda di Airy. Il problema che ci si pone è quanto estesa è questa zona in quanto si vuole evitare che una importante percentuale della vasca sia occupata da onde e flusso non desiderati.

All'aumentare dell'indice n della sommatoria (Fig. 5.3.2.1), il numero d'onda k_{S_n} cresce pertanto il decadimento con X è più rapido. Ci fermiamo quindi al caso $n=1$ con decadimento più lento in X .

Dalla Fig. 5.34 si ha che qualsiasi sia d , vale $\frac{\pi}{2} < k_{S_1}d < \pi$. Dunque nel caso peggiore $k_{S_1}d = \frac{\pi}{2}$.

$$\text{Allora } e^{-k_{S_1}X} = e^{-k_{S_1}dX/d} = e^{-\frac{\pi X}{2d}}$$

Quindi:

- per $\frac{X}{d} = 2 \rightarrow e^{-\frac{\pi X}{2d}} = 0.04 \rightarrow$ ampiezza dell'onda stazionaria di ordine 1 è 4% di quella generata inizialmente dall'ondogeno.
- Per $\frac{X}{d} = 3 \rightarrow e^{-\frac{\pi X}{2d}} = 0.009 \rightarrow$ ampiezza dell'onda stazionaria di ordine 1 è 9‰ di quella generata inizialmente dall'ondogeno.

A supporto di questa descrizione qualitativa, in Fig. 5.3.2.4 è presentata una sequenza di immagini relative all'evoluzione lungo una vasca dell'ampiezza delle armoniche dell'onda generata da un ondogeno a flap (parete di sinistra) a partire dalla quiete. Ogni immagine corrisponde alle ampiezze valutate punto per punto della vasca con una serie di Fourier a finestra mobile, con finestra di lunghezza nel tempo pari a 2 periodi d'onda completi.

Se non ci fossero onde stazionarie agganciate all'ondogeno (modi evanescenti), l'ampiezza dell'onda dovrebbe essere costante nello spazio. Come si vede invece (ellisse rossa), vicino alla parete di sinistra l'ampiezza della prima armonica è fortemente modulata nello spazio, ad indicare la presenza di fenomeni che perturbano l'onda da quella che riterremmo stabilizzata.

A completamento, si vede anche (ellisse blu) che la parete di sinistra non è completamente assorbente e riflette parzialmente l'onda incidente producendo una modulazione di ampiezza con periodo nello spazio pari a $\lambda/2$ di cui si è parlato nel paragrafo precedente ($C_R \neq 0$).

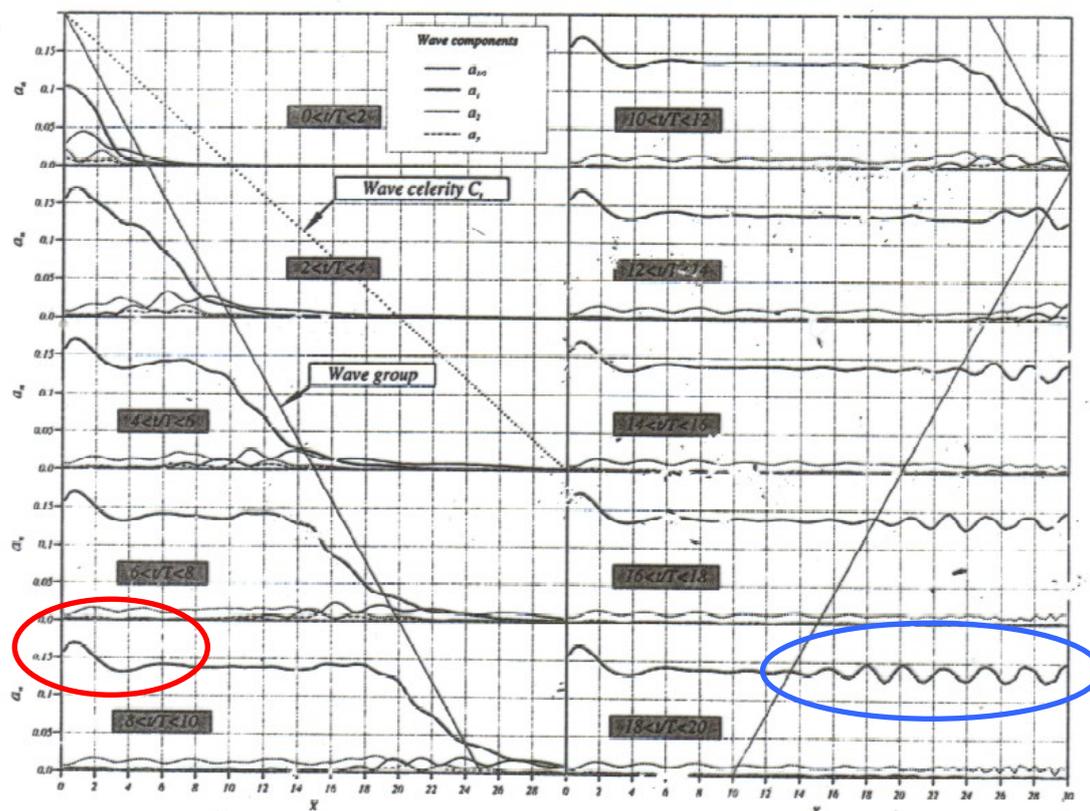


Fig. 5.3.2.4

5.3.3 MODI PROPRI DI OSCILLARE DEL BACINO CHIUSO

Un ultimo commento al problema delle onde in vasca chiusa riguarda la generazione dei modi propri di oscillare del bacino. E' noto che una bacino chiuso ha i suoi modi propri di oscillare che dipendono essenzialmente dalla geometria. Come tutti gli oscillatori, i modi naturali vengono eccitati dai transitori della forzante. In questo caso la forzante è l'ondogeno ed il transitorio di avviamento è da considerarsi lungo tanto quanto basta da aver stabilizzato le onde progressive in tutto il bacino. La Fig. 5.3.3.1 mostra un esempio di propagazione di un onda regolare dalla quiete. L'involuppo racchiude anche onde molto lunghe, specie davanti al fronte teorico che si propaga con la velocità di gruppo.

Durante questo transitorio l'oscillatore "vasca" reagisce con i suoi modi propri. Il problema che può manifestarsi è che trattandosi di oscillazioni di lungo periodo, il tempo di decadimento di tali modi può essere molto lungo e tale da richiedere tempi di attesa tra una prova e l'altra molto lunghi.

A tal fine può essere utile effettuare una indagine atta a capire quali sono le armoniche residue in vasca e che ampiezza hanno dopo un certo tempo dallo spegnimento dell'ondogeno.

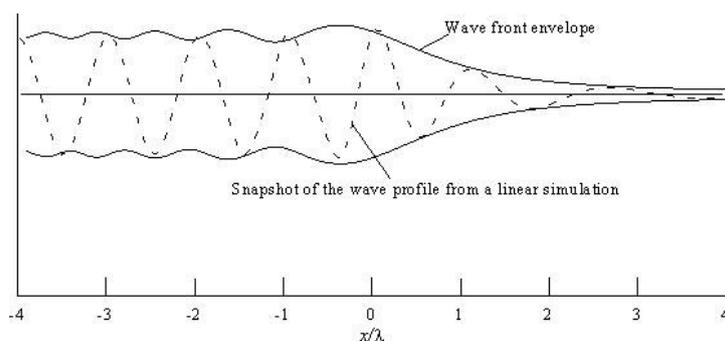


Fig. 5.3.3.1

Come esempio pratico, in Fig. 5.3.3.2 è presentata una analisi in frequenza condotta sulla serie temporale dell'elevazione d'onda misurata a metà bacino della vasca del DINMA. La serie è stata prelevata sulla finestra di tempo che va da 300 a 700 s dopo lo spegnimento dell'ondogeno.

Le linee verticali tratteggiate corrispondono ai modi naturali calcolati analiticamente con la teoria delle onde lineari stazionarie.

In Fig. 5.3.3.3 sono richiamati i modi propri di oscillare di una vasca rettangolare per evidenziare che i modi dispari sono difficilmente visibili con una misura effettuata a centro vasca.

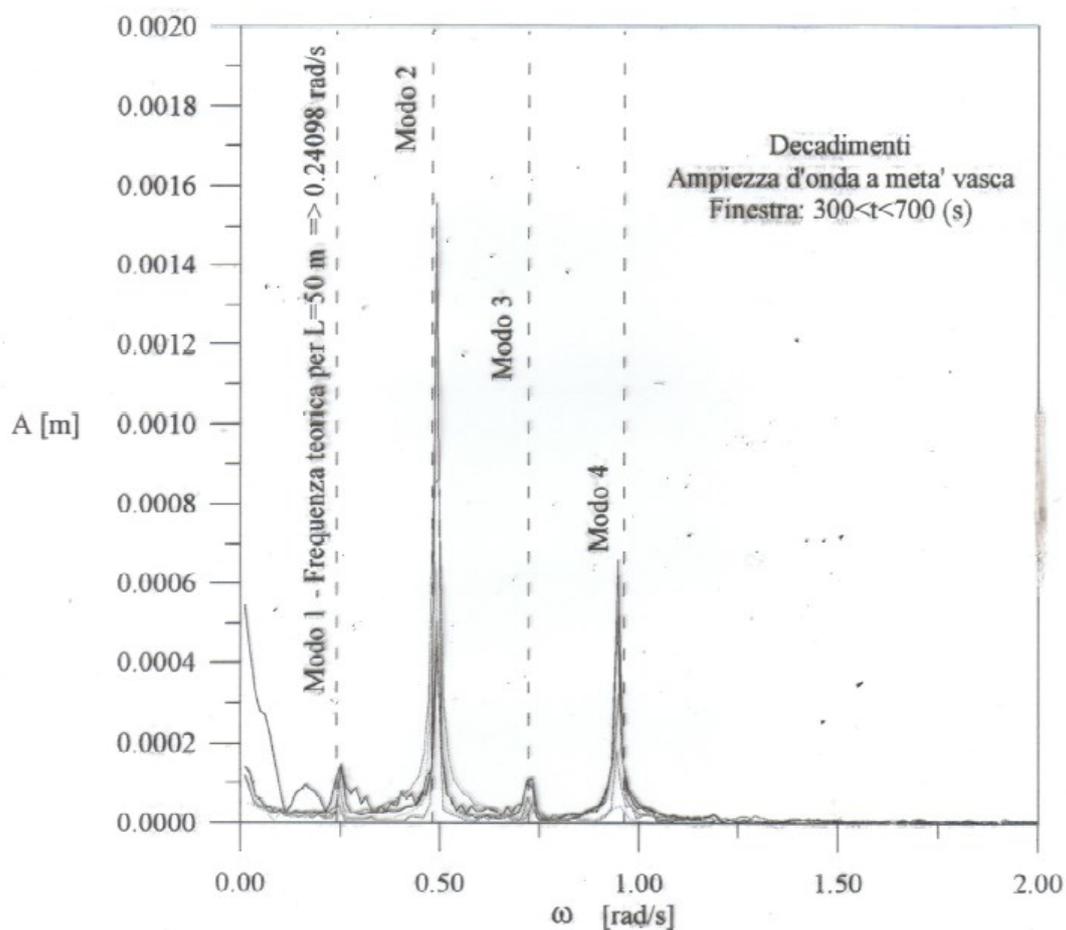


Fig. 5.3.3.2

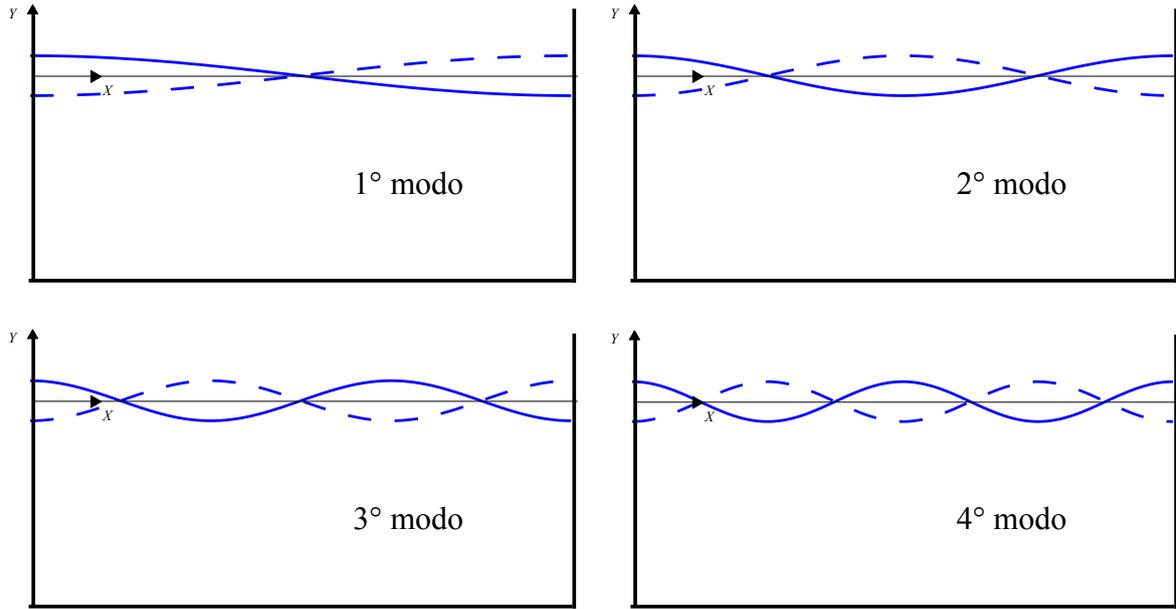


Fig. 5.3.3.3