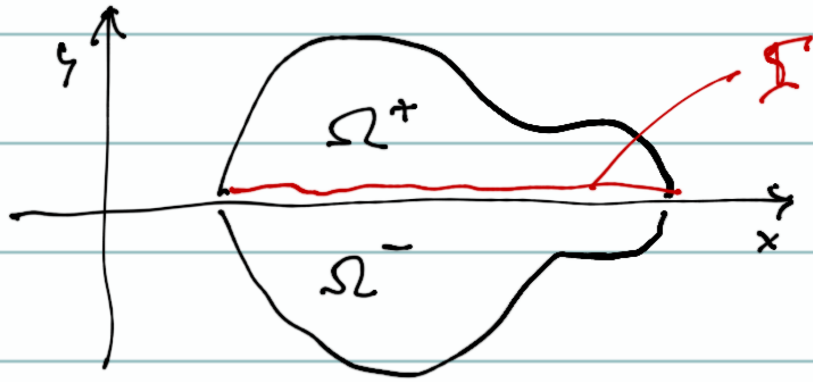
Def. Ω aperto $\subset \mathbb{C}$, Ω si dice simmetrico risp. all'asse reale se $\forall z \in \Omega$ anche $\bar{z} \in \Omega$.



Teor di riflessione di Schwarz

Sia u armonica in Ω^+ t.c. $\forall\ z_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega^+}} u(z) = 0$$

Allora, posto

$$w(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega^+ \\ 0 & z \in \Gamma \\ -u(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

w risulta armonica in tutto Ω.

Dim. Proviamo che w verifica la prop. del valor medio.

w ~~v~~ armonica separatamente in Ω^+ e in Ω^-

quindi $\forall\, z_0 \in \Omega^+ \cup \Omega^-$ e $\forall\, r < |\mathrm{Im}\, z_0|$, w verifica la prop. del val. medio nel disco

$$B_r(z_0)$$

ammesso che $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega^+ \cup \Omega^-$.

Sia ora $z_0 \in \Gamma$ e sia $r > 0$ t.c. $\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega$. Proviamo che

$$\begin{array}{c} w(z_0) \\ \| \\ 0 \end{array} = \underbrace{\frac{1}{2\pi r} \int_{\partial B_r(z_0)} w(z)\,|dz|}_{\overset{?}{=}\,0}$$

essendo $w(z) = -w(\bar{z})$ $\forall\, z \in \partial B_r(z_0)$ segue

$$\int_{\partial B_r(z_0)} w(z)\,|dz| = 0 . \qquad \square$$

Teor. (Princ. di riflessione di Schwarz per f. olomorfe).
Sia Ω aperto simmetrico risp. all'asse reale.
Sia $f \in H(\Omega^+)$ e supp. che $\forall z_0 \in \Gamma$

$$\lim_{\substack{z \in \Omega^+ \\ z \to z_0}} \underbrace{I_m(f(z))} = 0 \leftarrow$$

Allora esiste $F \in H(\Omega)$ tale che

$$F(z) = f(z) \qquad \forall z \in \Omega^+$$

e $\forall z \in \Omega$

$$F(z) = \overline{F(\bar{z})}$$

Lemma Sia $z_0 \in \mathbb{R}$ e sia $f \in H(B_r(z_0))$
$f = u + iv$
Se $v = 0$ su $B_r(z_0) \cap \mathbb{R}$ allora vale

v é simm. dispa. risp. a $\mathbb{R}$:

$$v(z) = -v(\bar{z}) \qquad \forall z \in B_r(z_0).$$

<u>Dim.</u> $$\partial_z f = \frac{1}{2}(\partial_x - i\partial_y)(u + iv) =$$

$$= (\partial_y + i\partial_x) v$$

$$\partial_z^{(k)} f = (\partial_y + i\partial_x)^{(k)} v$$

$$\partial_x v = 0 \quad \text{su} \quad B_r(z_0) \cap \mathbb{R}$$

Quindi su $B_r(z_0) \cap \mathbb{R}$

$$\partial_z^{(k)} f = \partial_y^{(k)} v \in \mathbb{R}$$

$$\partial_z^{(k)} f(z_0) = \partial_y^{(k)} v(z_0) \in \mathbb{R}$$

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \boxed{\frac{\partial_y^{(k)} v(z_0)}{k!}} (z - z_0)^k$$

$a_k = \bar{a}_k$

$$\overline{f(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} \overline{a_k}\, (\overline{z - z_0})^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (\bar{z} - z_0)^k =$$

$$= f(\bar{z})$$

$$f(z) = \overline{f(\bar{z})}$$

$$u(z) + i v(z) = u(\bar{z}) - i v(\bar{z}) \qquad \square$$

<u>Dim del Teor.</u> Sia $v = \mathrm{Im}\, f$

$$\Delta v = 0 \qquad \text{su } \Omega^+$$

$$\lim v = 0 \qquad \text{per } z \to z_0 \in \Gamma,\ z \in \Omega^+.$$

Posto

$$V(z) = \begin{cases} v(z) & z \in \Omega^+ \\ 0 & z \in \Gamma \\ -v(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

V è armonica in Ω per il Teor di Rif. per funz armoniche.

Poniamo:

$$U(z) = \begin{cases} u(z) & z \in \Omega^+ \\ u(\bar{z}) & z \in \Omega^- \end{cases}$$

Proviamo che

$F = U + iV$ si estende a tutto Ω come funz. olomorfa.

Sia $z_0 \in \Gamma$ e sia $r > 0$ t.c.

$$\overline{B_r(z_0)} \subset \Omega .$$

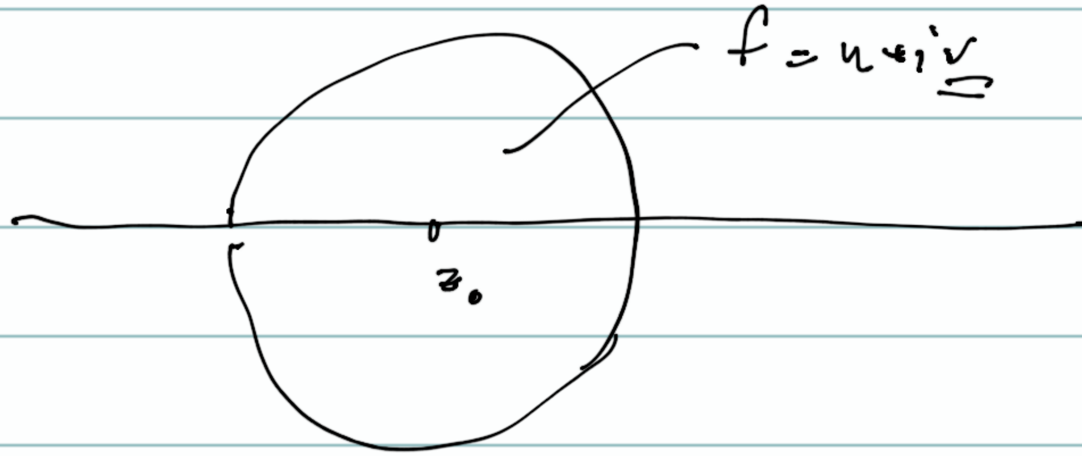
Allora esiste w armonica in $B_r(z_0)$ t.c.

$$\varphi = w + i\underline{V} \text{ è olomorfa in } B_r(z_0)$$

$$\operatorname{Im}\varphi\Big|_{B_r(z_0)\cap\mathbb{R}} = 0$$

Per il Lemma $\quad \varphi(z) = \overline{\varphi(\bar z)}$;

$$w(z) = w(\bar z)$$



Posto $\quad B^+ = B_r(z_0) \cap \{\operatorname{Im} z \geq 0\}$

$$\operatorname{Im} f = v = \operatorname{Im}\varphi$$

$$\operatorname{Re}(f - \varphi) = C \quad \text{su} \quad B^+$$

$$u = w + C \quad \text{su} \quad B^+$$

Quindi anche u si estende in modo armonico a $B_r(z_0)$ ponendo

$$\mathcal{U}(z) = \begin{cases} u(z) & z \in B^+ \\ v(z)+C & z \in B_r(z_0) \cap \mathbb{R} \\ u(\bar{z}) & \bar{z} \in B^+ \end{cases}$$

Quindi $\mathcal{U}$ definita per $\operatorname{Im} z \neq 0$ ha limite per $z \to z_0 \in \Gamma$ $\forall z_0 \in \Gamma$ ed è armonica in tutto Ω.

$F = \mathcal{U} + i\mathcal{V}$ è def su tutto Ω, verifica $\partial_{\bar{z}} F = 0$ su tutto $\Omega \setminus \Gamma$ è dotata di deriv. reali continue su tutto Ω quindi per continuità

$$\partial_{\bar{z}} F = 0 \quad \text{su tutto } \Omega.$$

Abbiamo $\mathcal{U}(z) = \mathcal{U}(\bar{z})$, $\mathcal{V}(z) = -\mathcal{V}(\bar{z})$

e quindi

$$F(z) = \overline{F(\bar{z})} \qquad \square$$

<u>Esercizi</u> Ω aperto simmetrico risp. a $\mathbb{R}$

$\Omega^+, \Omega^-, \Gamma$ def come prima.

Sia $f \in H(\Omega^+)$ t.c. esistono $a, b \in \mathbb{R}$ $(a^2+b^2>0)$ t.c.

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ z \in \Omega^+}} (a u(z) + b v(z)) = 0 \quad \forall z_0 \in \Gamma.$$

$(f = u + iv)$

Provare che f si estende a una funzione olomorfa $F \in H(\Omega)$ e scrivere la regola di estensione.

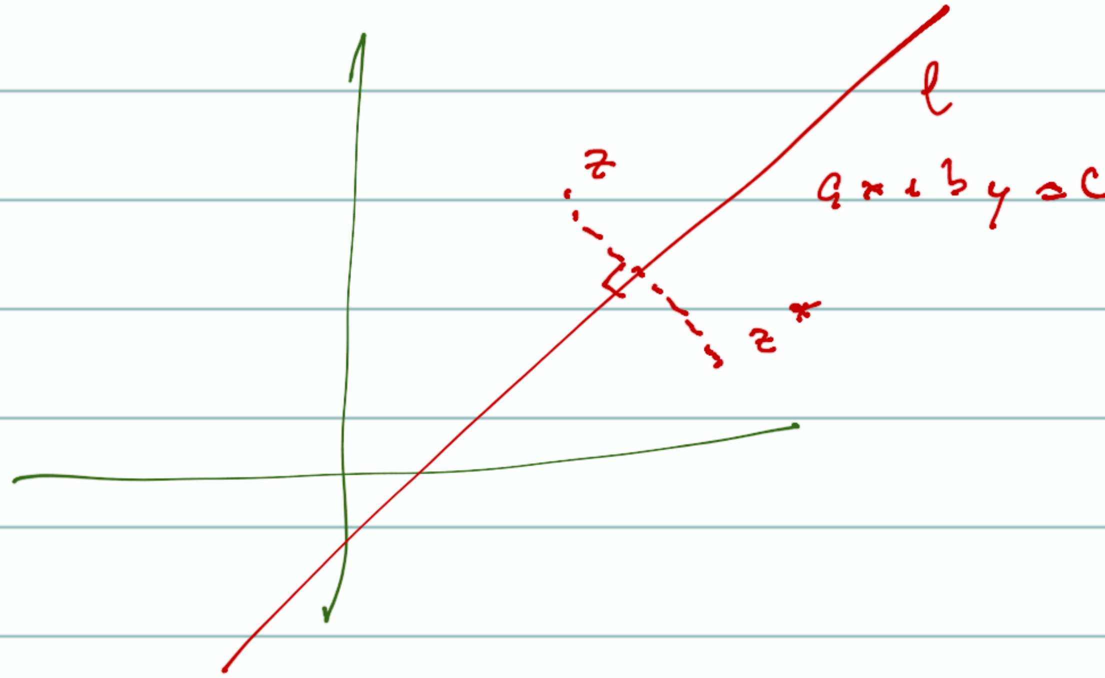
$$f$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{(b+ia)(u+iv) = (bu - av) + i(au+bv)}$$

g $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\mathrm{Im}\, g$

<u>Esercizio</u>



Sia Ω aperto simmetrico risp. a ℓ

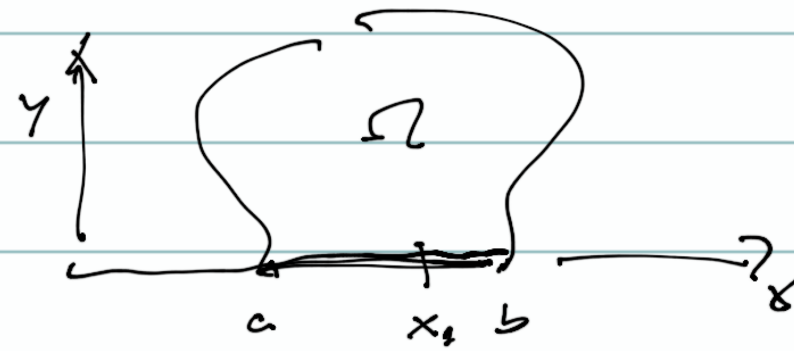
($z \in \Omega$ sse $z^* \in \Omega$)

Formulare un princ. di riflessione per questo Ω.

Esercizio Sia $f \in H(\Omega)$ e sia Ω connesso

t.c. $\Omega \subset \{\operatorname{Im} z > 0\}$

$$\partial\Omega \cap \mathbb{R} = [a,b] \quad , a<b.$$



Supp. che $f \in C(\Omega \cup [a,b])$.

Se $\operatorname{Im} f = 0$ su $[a,b]$ ed esiste

una succ. $\{x_n\} \subset [a,b]$, $x_n \to x_0 \in (a,b)$

t.c

$$\operatorname{Re} f(x_n) = 0 , \quad \text{allora}$$

$$f \equiv 0.$$

Disuguaglianza di Harnack

Sia u armonica in $B_R(z_0)$, $\underline{u \geq 0}$.

$\forall\, z \in B_R(z_0)$

$$\frac{R-|z-z_0|}{R+|z-z_0|}\, u(z_0) \leq u(z) \leq \underbrace{\frac{R+|z-z_0|}{R-|z-z_0|}}_{\to\infty}\, u(z_0)$$

se $\underline{|z-z_0| \to R}$ $\longrightarrow 0$

Dim. Sia $z \in B_R(z_0)$ e sia $\rho = |z-z_0|$

Poniamo s t.c. $\underline{\rho < s < R}$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi s}\int_{\partial B_s(z_0)} \frac{s^2-|z-z_0|^2}{|\xi - z|^2}\, u(\xi)\,|d\xi|$$

$$|\xi - z| = |(\xi - z_0) - (z - z_0)| \quad \begin{matrix} \leq s+\rho \\ \geq s-\rho \end{matrix}$$

$$u(z) \geq \frac{1}{2\pi s}\int_{\partial B_s(z_0)} \frac{s^2-\rho^2}{(s+\rho)^2}\, \underbrace{u(\xi)}_{\geq 0}\,|d\xi| =$$

$$= \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial B_s(z_0)} \underbrace{\frac{s-\rho}{s+\rho}}_{\text{cost.}} u(\xi)\,|d\xi| =$$

$$= \frac{s-\rho}{s+\rho}\, u(z_0) \qquad \forall s,\ \rho < s < R$$

$$\longrightarrow \frac{R-\rho}{R+\rho}\, u(z_0)$$

$$u(z) \leq \frac{1}{2\pi s} \int_{\partial B_s(z_0)} \underbrace{\frac{s^2-\rho^2}{(s-\rho)^2}} u(\xi)\,|d\xi| =$$

$$= \frac{s+\rho}{s-\rho}\, u(z_0) \longrightarrow \frac{R+\rho}{R-\rho}\, u(z_0) \qquad \square.$$

<u>Esempio</u> $\quad B_1(0), \quad u(z) = P(z;1)$

$$u(z) = \frac{1}{2\pi} \frac{1-|z|^2}{|1-z|^2}, \qquad u(0) = \frac{1}{2\pi}$$

Se prendo $z \in \mathbb{R}$ $\quad z = x + i0$

se $x > 0$

$$u(x) = u(0)\, \frac{1+x}{1-x}$$ verifica la maggiorazione.

Se $x < 0$ $\quad u(x) = u(0)\, \frac{1-x}{1+x}$ si verifica $1' = 0$ nel lato del ≥ 0 della dis di H.