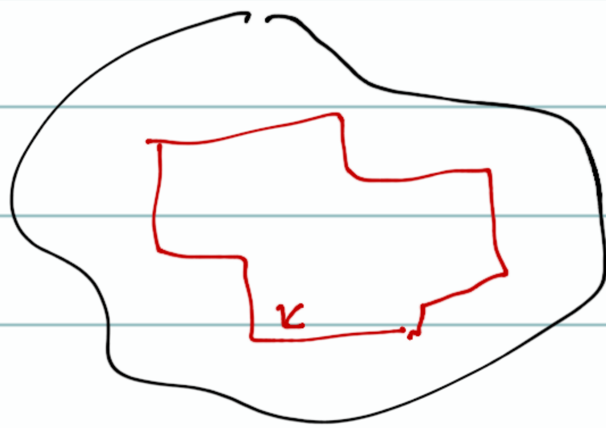
Dis. di Harnack

Sia Ω aperto connesso. Per ogni s.i. compatto $K \subset \Omega$ esiste $C>0$ t.c. per ogni funz. armonica u in Ω $u \geq 0$ vale

$$\max_K u \leq C \min_K u$$



Oss. Se $u \geq 0$ e armonica in Ω allora se $u \equiv 0$ su un s.i. aperto G di Ω allora $u \equiv 0$ dappertutto.

Infatti: avremo

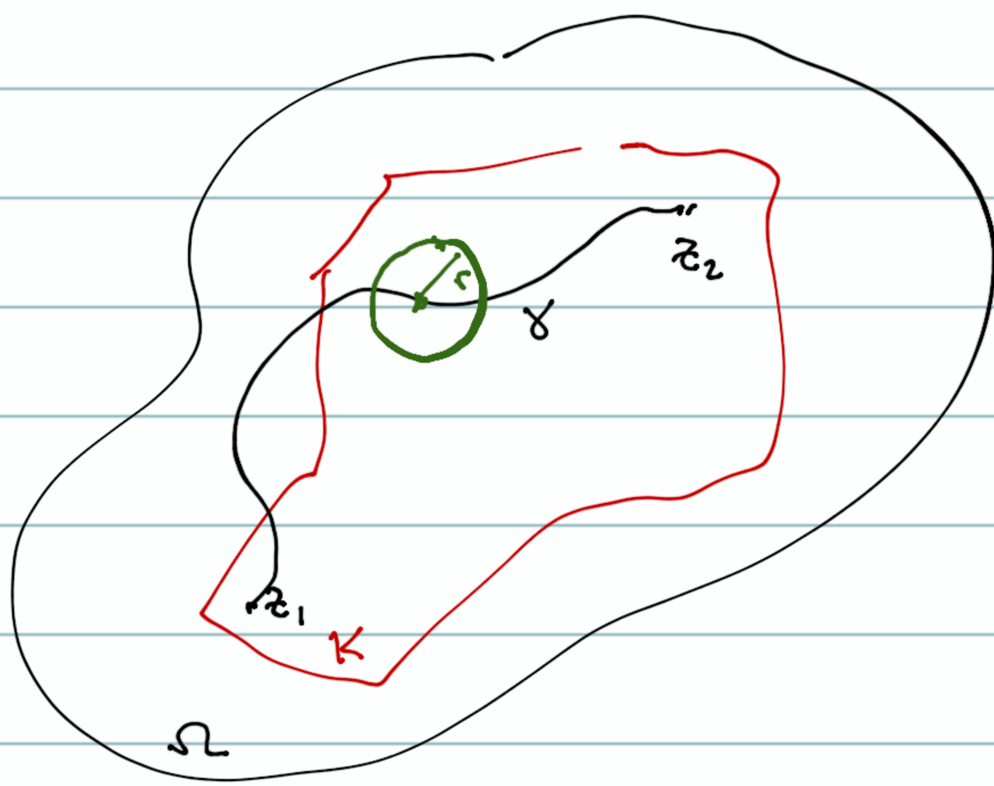
$$\varphi = \partial_z u \equiv 0 \quad \text{su tutto } G$$

$\varphi \in H(\Omega) \Rightarrow \varphi \equiv 0$ su Ω

$\Rightarrow u \equiv$ cost su Ω, ma $u \equiv 0$ su G

cioè $u \equiv 0$ su Ω.

Dim



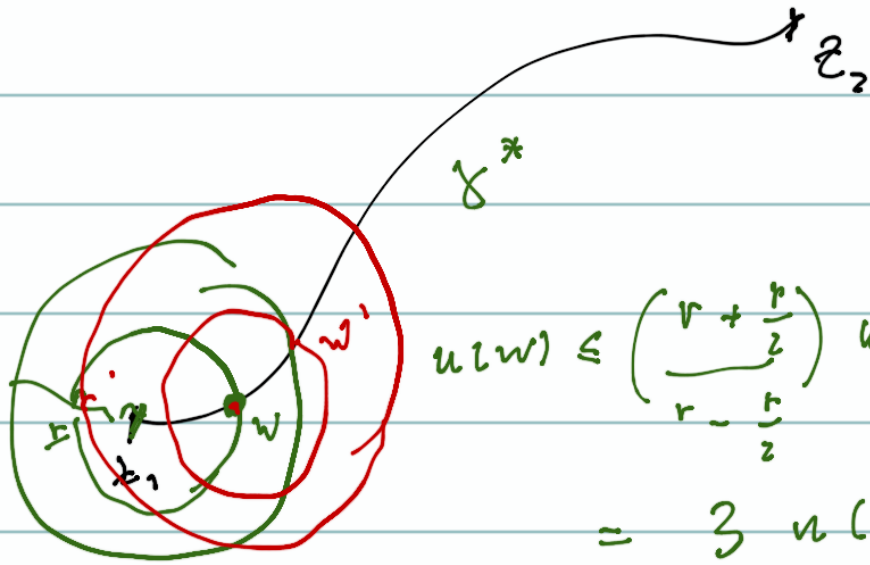
Siano $z_1, z_2 \in K$, $\exists \gamma : [0,1] \to \Omega$

cammino t.c.

$$\gamma(0) = z_1 , \quad \gamma(1) = z_2$$

Dato che $\gamma^* \subset \Omega$ è compatto $\exists r > 0$

t.c. $\quad \operatorname{dist}(\gamma(t), \complement\Omega) \geq r > 0 \quad \forall\, t \in [0,1].$



$$u(w) \leq \left(\frac{r + \frac{r}{2}}{r - \frac{r}{2}}\right) u(z_1) = 3\, u(z_1).$$

In un no. finito N di iterazioni riesco a raggiungere il pto z_2

$$u(z_2) \leq 3^N u(z_1)$$

$$\max_K u \leq 3^N \min_K u. \qquad \square$$

Principio di massimo per funz. armoniche.

Sia Ω aperto connesso, sia u armonica in Ω.

Sia

$$M = \sup_{\Omega} u$$

Allora, se u non è costante si ha

$$u(z) < M \qquad \forall\ z \in \Omega.$$

Dim Se $M = +\infty$ la disug. è ovvia.

Sia $M < \infty$ allora

$$v = M - u \quad \text{è armonica}$$

e si ha

$$v \geq 0 \quad \text{in } \Omega$$

Per Harnack: o $v \equiv 0$ oppure

$$v > 0 \quad \text{in tutto } \Omega.$$

$$u < M \quad \text{''} \quad \text{''} \qquad \square$$

Esercizio

Princ. di max $\Rightarrow$ Princ. di max modulo.

Sia Ω connesso, $f \in H(\Omega)$ non costante. Voglio provare che $\forall z \in \Omega$

$$|f(z)| < \sup_{\Omega} |f|$$

$$w(z) = \log |f(z)|$$

Sia Z l'ins. degli zeri di f

$\tilde{\Omega} = \Omega \setminus Z$ è ancora un aperto connesso

$\Delta w = 0$ in $\tilde{\Omega}$ $\left(4 \partial_z \partial_{\bar z} \frac{1}{2} \left(\log f + \log \bar f \right) \right)$ $= 0$

Sia $z_0 \in Z$ e $z \to \underline{\underline{z_0}}$, $z \in \tilde{\Omega}$:

$$w(z) = \log|f(z)| \to -\infty$$

$$\sup_{\tilde{\Omega}} w = \sup_{\tilde{\Omega}} \log|f| = \log M$$

Se w non è cost in $\tilde{\Omega}$

$$w < \log M \quad \text{in } \tilde{\Omega}$$

$$\log|f(z)| < \log M \quad \forall z \in \tilde{\Omega}$$

$$|f(z)| < M \quad \square$$

$$f = u + iv$$

$$|f|^2 = u^2 + v^2$$

$$u^2(z) < \sup_{\Omega} u^2 \leftarrow \ ?$$

$$v^2(z) < \sup_{\Omega} v^2 \leftarrow \ ?$$

$$\boxed{\inf_{\Omega} u < u < \sup_{\Omega} u}$$

$$\Delta u = 0$$

$$\Delta u^2 = \sum_i \partial_{x_i} \left(\partial_{x_i} u^2 \right) =$$

$$= \sum_i \partial_{x_i} \left(2 u \, \partial_{x_i} u \right) =$$

$$= 2 \sum_i \left(\partial_{x_i} u \right)^2 \geq 0$$

$$\Delta u^2 \geq 0$$

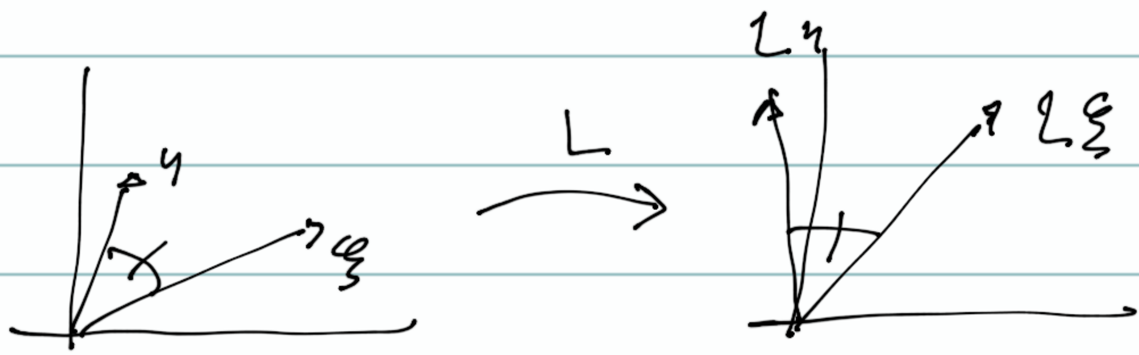
u^2 è subarmonica

Si dim che le funz. sub-armoniche verificano un princ. di max.

— x —

Mappe conformi

Def. Una trasf. lineare invertibile di $\mathbb{R}^2$ in sé si dice conforme se conserva gli angoli.



Sia L data dalla matrice

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

Lemma L è conforme se e solo se

$$L = \lambda R$$

dove $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ e R è trasf. ortog.

cioè $R^T R = I$

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

Oss. Se ci limitiamo a trasf. L che conservano l'orientazione abbiamo

$$L = \lambda \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$$

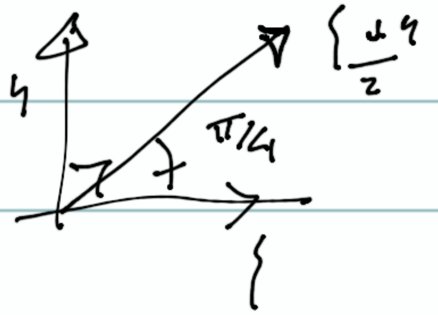
per qualche $\lambda \neq 0$, $\vartheta \in \mathbb{R}$.

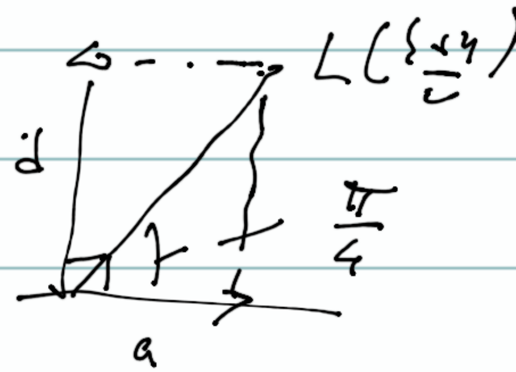
Dim. Supp. per il momento

$$L = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$$

proviamo che L cons. gli angoli solo se $a = \pm d \neq 0$

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\0\end{pmatrix}, \quad L\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\d\end{pmatrix}$$





solo se $d=\pm a$

Sia $L=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

$$L\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a\\c\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, \quad \lambda\neq 0$$

Sia $T=\begin{pmatrix}\cos\varphi & \sin\varphi\\ -\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$.

$$\boxed{TL\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}c & s\\ -s & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c\\s\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}$$

Sia $\vartheta\in\mathbb{R}$ qualunque

$$TL\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \sin\vartheta\end{pmatrix}=\lambda(\vartheta)\begin{pmatrix}\cos\vartheta\\ \pm\sin\vartheta\end{pmatrix}$$

$$\vartheta = \frac{\pi}{2} \quad , \quad \begin{pmatrix} \cos\vartheta \\ \sin\vartheta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{TL \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \begin{pmatrix} 0 \\ \pm 1 \end{pmatrix}}$$

$$TL = \begin{pmatrix} \lambda(0) & 0 \\ 0 & \pm\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \end{pmatrix}$$

quindi $\lambda(0) = \pm\lambda\left(\frac{\pi}{2}\right) \equiv \lambda$ costante.

$$TL = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}$$

$$L = \lambda \underbrace{T^{-1} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \pm 1 \end{pmatrix}}_{R} \qquad R^T R = I. \quad \square$$

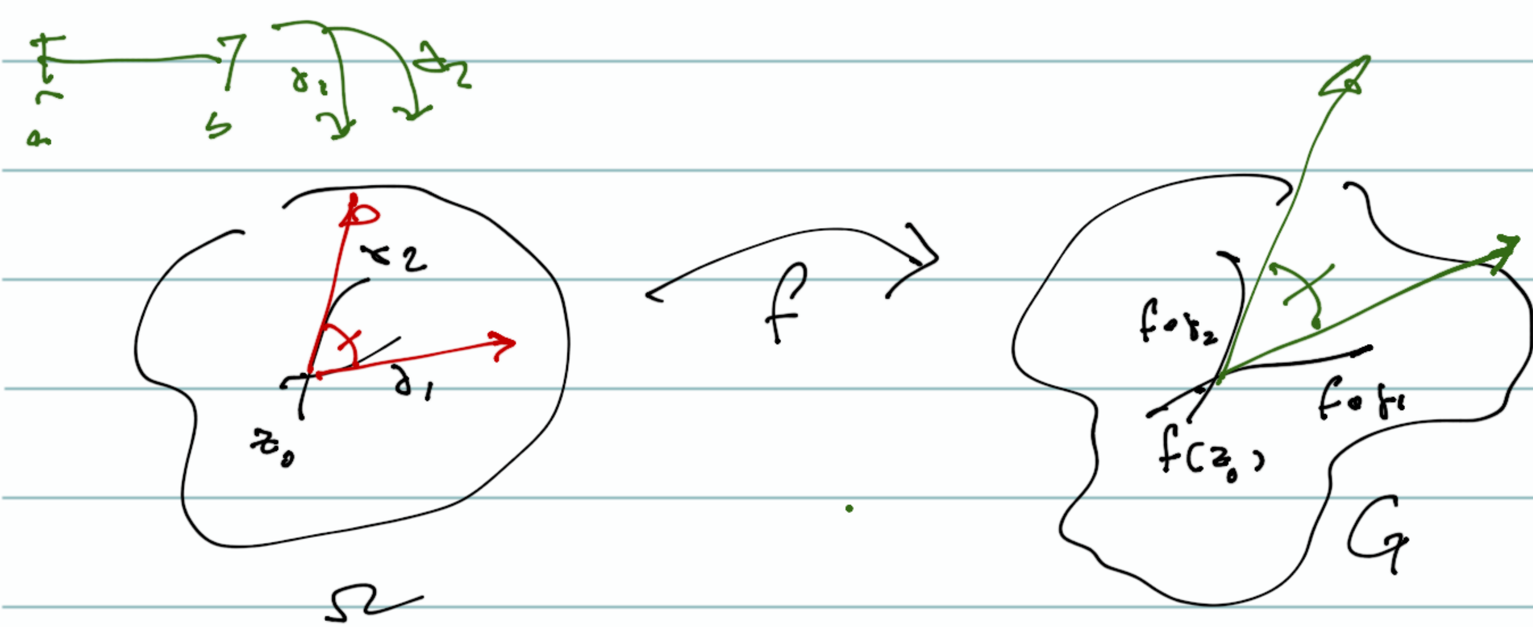
D'ora in avanti ci limitiamo a trasf. che conservano l'orientamento.

Def. Un diffeomorf.

$$f : \Omega \to G$$

Ω, G aperti di $\mathbb{R}^2$ si dice conforme se $\forall z_0 \in \Omega$, $\forall \gamma_1, \gamma_2$ curve reg passanti per z_0 si ha che l'angolo tra $\dot\gamma_1$ e $\dot\gamma_2$ in z_0 coincide con l'angolo tra

$$(f\circ\gamma_1)' \quad e \quad (f\circ\gamma_2)' \quad in \quad f(z_0)$$



Lemma $f=(u,v)$ è mappa conforme se $\forall\, z_0 \in \Omega$ la matrice Jacobiana di f in z_0:

$$Df(z_0) = \begin{pmatrix} u_x(z_0) & u_y(z_0) \\ v_x(z_0) & v_y(z_0) \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} c & s \\ -s & c \end{pmatrix}$$

è la matrice di una trasf. lin. conforme.

Oss. f è conforme, sse u,v verificano Cauchy-Riemann.