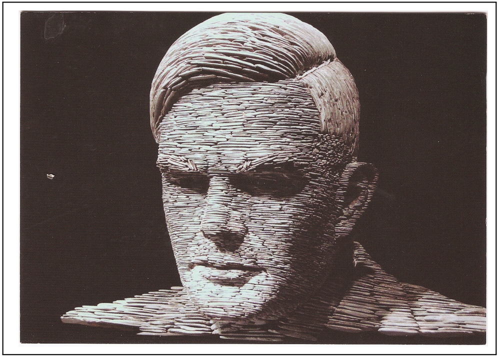
Clausole di Horn e computabilità

Eugenio G. Omodeo Trieste, 21/05/2019

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE



(Alan Mathison Turing, 1912–1954)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Di che si occupa la teoria della computabilità
-
-
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Di che si occupa la teoria della computabilità
- Un'esplicitazione del concetto di funzione calcolabile
-
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

- Di che si occupa la teoria della computabilità
- Un'esplicitazione del concetto di funzione calcolabile
- Completezza di Turing della programmaz. tramite clausole di Horn
-

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Scaletta

- Di che si occupa la teoria della computabilità
- Un'esplicitazione del concetto di funzione calcolabile
- Completezza di Turing della programmaz. tramite clausole di Horn
- Indecidibilità della logica predicativa del 1º ordine

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Di che si occupa
la computabilità ?

(Mair Eluned Thomas Russell-Jones, 1917–2013)

"*Computability theory* $[\cdots]$ *is the theory of computation obtained when limitations of space and time are deliberately ignored.*"

[Davis et al.(1994), pag. 237]

"*Computability theory* [$\cdots$] *is the theory of computation obtained when limitations of space and time are deliberately ignored.*"

[Davis et al.(1994), pag. 237]

"*Computability theory (also called recursion theory) studies the class of partially computable functions.*"

[Davis et al.(1994), pag. 31]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

"*Computability theory* $[\cdots]$ *is the theory of computation obtained when limitations of space and time are deliberately ignored.*"

[Davis et al.(1994), pag. 237]

"*Computability theory (also called recursion theory) studies the class of* $\boxed{\textit{partially}}$ *computable functions.*"

[Davis et al.(1994), pag. 31]

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un articolo che segna una svolta epocale

Wikipedia
The Free Encyclopedia

ON COMPUTABLE NUMBERS, WITH AN APPLICATION TO THE ENTSCHEIDUNGSPROBLEM

By A. M. TURING

[Received 28 May, 1936.—Read 12 November, 1936.]

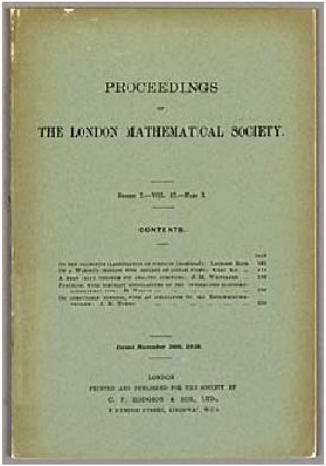
1. Computing machines.
2. Definitions.

   Automatic machines.
   Computing machines.
   Circle and circle-free numbers.
   Computable sequences and numbers.

3. Examples of computing machines.
4. Abbreviated tables

   Further examples.

5. Enumeration of computable sequences.
6. The universal computing machine.
7. Detailed description of the universal machine.
8. Application of the diagonal process.
9. The extent of the computable numbers.
10. Examples of large classes of numbers which are computable.
11. Application to the Entscheidungsproblem.



Funzioni parziali sui naturali

Quando una funzione g è definita su un sottoinsieme di $\mathbb{N}^a$ e assume valori in $\mathbb{N}$, ciò viene indicato cosí:

$$g : \quad \mathbb{N}^a \rightharpoonup \mathbb{N} .$$

Diciamo che tale funzione è ***parziale***, di ***arità*** a .

Quando una funzione g è definita su un sottoinsieme di $\mathbb{N}^a$ e assume valori in $\mathbb{N}$, ciò viene indicato cosí:

$$g : \quad \mathbb{N}^a \quad \rightharpoonup \quad \mathbb{N} .$$

Diciamo che tale funzione è ***parziale***, di ***arità*** a .

Esempio: Qualsiasi polinomio

$$D \quad \in \quad \mathbb{Z}[\, k_1 \,, \ldots, \, k_a \,]$$

induce una funzione parziale g sulle a-uple

$$\langle n_1, \ldots, n_a \rangle \quad \in \quad \mathbb{N}^a$$

secondo la regola:

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Quando una funzione g è definita su un sottoinsieme di $\mathbb{N}^a$ e assume valori in $\mathbb{N}$, ciò viene indicato cosí:

$$g : \quad \mathbb{N}^a \quad \rightharpoonup \quad \mathbb{N} \, .$$

Diciamo che tale funzione è ***parziale***, di ***arità*** a .

Esempio: Qualsiasi polinomio

$$D \quad \in \quad \mathbb{Z}[\, k_1 \, , \ldots , \, k_a \,]$$

induce una funzione parziale g sulle a-uple

$$\langle \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a \rangle \quad \in \quad \mathbb{N}^{\mathrm{a}}$$

secondo la regola:

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a) = \begin{cases} D(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a) & \text{purché questo val. non sia negativo}\,, \\ \text{non definito} & \text{se invece è negativo} \end{cases}$$

NON DEFINITO VA INTESO COME NON TERMINANTE ?

Quando—come nel caso dei polinomi menzionato ora—i valori di una funzione sono *calcolabili*, al termine '*non definito*' possiamo attribuire il significato di un comportamento perpetuo. . .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

NON DEFINITO VA INTESO COME NON TERMINANTE ?

Quando—come nel caso dei polinomi menzionato ora—i valori di una funzione sono *calcolabili*, al termine '*non definito*' possiamo attribuire il significato di un comportamento perpetuo. . .

. . . non sempre desiderabile o intenzionale !

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Quando—come nel caso dei polinomi menzionato ora—i valori di una funzione sono *calcolabili*, al termine '*non definito*' possiamo attribuire il significato di un comportamento perpetuo. . .

. . . non sempre desiderabile o intenzionale !

;)

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Generalizzando l'esempio di prima: Sia

$$D(\underbrace{k_1, \ldots, k_a}, \underbrace{x_1, \ldots, x_m})$$

un pol. a coefficienti in $\mathbb{Z}$ nelle indeterminate

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Generalizzando l'esempio di prima: Sia

$$D(\underbrace{k_1, \dots, k_a}_{\text{parametri formali}}, \underbrace{x_1, \dots, x_m}_{\text{incognite}})$$

un pol. a coefficienti in $\mathbb{Z}$ nelle indeterminate k_i e x_j .

Generalizzando l'esempio di prima: Sia

$$D(\underbrace{k_1, \ldots, k_a}_{\substack{\text{parametri}\\ \text{formali}}}, \underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{incognite}})$$

un pol. a coefficienti in $\mathbb{Z}$ nelle indeterminate k_i e x_j .

Quali sono le a-uple

$$\langle \boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a \rangle \in \mathbb{N}^a$$

per le quali l'eq.

$$D(\underbrace{\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a}_{\substack{\text{parametri}\\ \text{impostati}}}, \underbrace{x_1, \ldots, x_m}_{\text{incognite}}) = \mathbf{0}$$

ammette soluzione su $\mathbb{N}$?

Almeno una delle seguenti 2 funzioni è calcolabile ?

$$\breve{g}\,(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a) \;=\; \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } D(\,\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a\,,\; x_1, \ldots, x_m\,) = \mathbf{0} \\ & \qquad\qquad\qquad \text{ha sol. su } \mathbb{N}\,, \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Almeno una delle seguenti 2 funzioni è calcolabile ?

$$\breve{\boldsymbol{g}}\,(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a) \;=\; \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } D(\,\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a\,,\, x_1, \ldots, x_m\,) = \mathbf{0} \\ & \qquad\qquad \text{ha sol. su } \mathbb{N}\,, \\ \mathbf{0} & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

$$\widehat{\boldsymbol{g}}(\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a) \;=\; \begin{cases} \mathbf{1} & \text{se } D(\,\boldsymbol{n}_1, \ldots, \boldsymbol{n}_a\,,\, x_1, \ldots, x_m\,) = \mathbf{0} \\ & \qquad\qquad \text{ha sol. su } \mathbb{N}\,, \\ \text{indef.} & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

Almeno una delle seguenti 2 funzioni è calcolabile ?

$$\breve{g}\,(n_1,\dots,n_a) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } D(\,n_1,\dots,n_a\,,\,x_1,\dots,x_m\,) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{ha sol. su } \mathbb{N}\,, \\ 0 & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

$$\widehat{g}(n_1,\dots,n_a) \;=\; \begin{cases} 1 & \text{se } D(\,n_1,\dots,n_a\,,\,x_1,\dots,x_m\,) = 0 \\ & \qquad\qquad \text{ha sol. su } \mathbb{N}\,, \\ \text{indef.} & \text{altrimenti}\,. \end{cases}$$

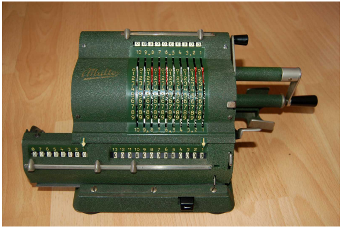
La $\widehat{g}$ sí, certo, ma la $\breve{g}$ chissà. . .

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un *déjà vu* ?

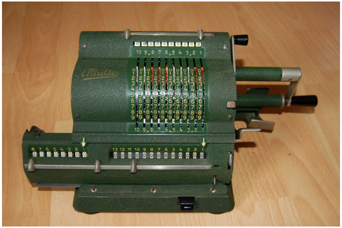
UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un *déjà vu* ?



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Un *déjà vu* ?



Quanto *superficiale (?)* è l'affinità fra l'enumerazione di tutte le dimostrazioni di una teoria e la ricerca sistematica degli zeri di un polinomio diofanteo?

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Hilbert

David Hilbert avanzò 23 problemi in occasione

del *Congresso internazionale dei matematici*

a Parigi, l'8 agosto 1900

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

David Hilbert avanzò 23 problemi in occasione

del *Congresso internazionale dei matematici*

a Parigi, l'8 agosto 1900

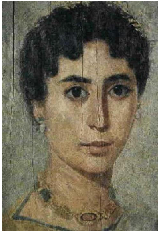
10. Entscheidung der Lösbarkeit einer diophantischen Gleichung Eine diophantische Gleichung mit irgendwelchen Unbekannten und mit ganzen rationalen Zahlkoeffizienten sei vorgelegt: *Man soll ein Verfahren angeben, nach welchem sich mittels einer endlichen Anzahl von Operationen entscheiden läßt, ob die Gleichung in ganzen rationalen Zahlen lösbar ist*.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

David Hilbert avanzò 23 problemi in occasione
del *Congresso internazionale dei matematici*
a Parigi, l'8 agosto 1900

10. Determinazione della risolubilità di un'equazione diofantea

Data un'equazione diofantea in qualsiasi numero d'incognite e a coefficienti interi razionali: *Ideare un procedimento per mezzo del quale si possa stabilire, in un numero finito di operazioni, se l'equazione sia o no risolubile negli interi razionali*.



(Ipazia, ca. 370 / 415 d.C.)

David Hilbert avanzò 23 problemi in occasione del *Congresso internazionale dei matematici* a Parigi, l'8 agosto 1900

10. Determinazione della risolubilità di un'equazione diofantea

Data un'equazione diofantea in qualsiasi numero d'incognite e a coefficienti interi razionali: *Ideare un procedimento per mezzo del quale si possa stabilire, in un numero finito di operazioni, se l'equazione sia o no risolubile negli interi razionali*.

Un'esplicitaz.
del concetto di
funzione calcolabile

Basic Result, Part I *By means of detailed combinatorial studies* (see, for example, Turing [1937] and Kleene [1936*a*],) *the proposed characterizations of Turing and of Kleene, as well as those of Church, Post, Markov, and certain others, were all shown to be equivalent; that is to say, exactly the same class of partial functions* (*and hence of total functions*) *is obtained in each case.*

Definition The functions falling within this class are called *recursive functions.* The partial functions of this class might, naturally, be termed "recursive partial functions." It has become standard usage, however, to call them *partial recursive functions.*

These equivalence demonstrations can be generalized to show that over certain very broad families of enlargements of these formal characterizations the class of partial functions obtained remains unchanged. (For example, if we allow

[Rogers(1967), pag. 18]

Chiamiamo $\boldsymbol{g}$ ***funzione parzialmente computabile*** (sui numeri naturali) sse esiste una lista

$$\boldsymbol{g}_0, \dots, \boldsymbol{g}_M,$$

con M numero naturale qualsiasi e $\boldsymbol{g}_M = \boldsymbol{g}$, di funzioni

$$\boldsymbol{g}_i : \quad \mathbb{N}^{a_i} \quad \rightharpoonup \quad \mathbb{N}$$

tali che ogni $i = 0, \dots, M$ soddisfi almeno una delle sei condiz. ☞

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞ ***Funzioni iniziali:***

(1) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $n \mapsto 0$ di arità $a_i = 1$ che manda ogni numero nello 0;

☞

☞ ***Funzioni iniziali:***

(1) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $n \mapsto 0$ di arità $a_i = 1$ che manda ogni numero nello 0;

(2) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $n \mapsto n+1$ di arità $a_i = 1$ che manda ciascun numero n nel suo successore immediato $n+1$;

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞ ***Funzioni iniziali:***

(1) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $n \mapsto 0$ di arità $a_i = 1$ che manda ogni numero nello 0;

(2) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $n \mapsto n + 1$ di arità $a_i = 1$ che manda ciascun numero n nel suo successore immediato $n + 1$;

(3) $\boldsymbol{g}_i$ è la funzione $\langle n_1, \ldots, n_{a_i} \rangle \mapsto n_j$ di arità $a_i > 0$ che manda—per qualche j con $0 < j \leqslant a_i$—ogni a_i-upla $\langle n_1, \ldots, n_{a_i} \rangle$ di numeri nella j-sima componente, n_j;

☞

☞

(4) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***composizione*** da funzioni

$$\boldsymbol{g}_h\,,\ \boldsymbol{g}_{\ell_1}\,,\ldots,\ \boldsymbol{g}_{\ell_m}\,,\quad \text{con } h,\ \ell_1\,,\ldots,\ \ell_m < i\,,$$

dove ciascuna delle $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ ha arità uguale all'arità a_i di $\boldsymbol{g}_i$, mentre $\boldsymbol{g}_h$ ha arità $a_h = m$.

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(4) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***composizione*** da funzioni

$$\boldsymbol{g}_h\,,\ \boldsymbol{g}_{\ell_1}\,,\ldots,\ \boldsymbol{g}_{\ell_m}\,,\quad \text{con } h,\ \ell_1\,,\ldots,\ \ell_m\ <\ i\,,$$

dove ciascuna delle $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ ha arità uguale all'arità a_i di $\boldsymbol{g}_i$, mentre $\boldsymbol{g}_h$ ha arità $a_h = m$.
Ciò significa che se in $\langle\, n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,\rangle$ tutte le $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ sono definite, e definito è anche il valore

$$\boldsymbol{g}_h\Big(\boldsymbol{g}_{\ell_1}(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)\,,\ldots,\ \boldsymbol{g}_{\ell_m}(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)\Big)\,,$$

quest'ultimo verrà a coincidere con $\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)$;

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(4) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***composizione*** da funzioni

$$\boldsymbol{g}_h\,,\ \boldsymbol{g}_{\ell_1}\,,\ldots,\ \boldsymbol{g}_{\ell_m}\,,\quad \text{con } h,\ \ell_1\,,\ldots,\ \ell_m < i\,,$$

dove ciascuna delle $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ ha arità uguale all'arità a_i di $\boldsymbol{g}_i$, mentre $\boldsymbol{g}_h$ ha arità $a_h = m$.
Ciò significa che se in $\langle\, n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,\rangle$ tutte le $\boldsymbol{g}_{\ell_k}$ sono definite, e definito è anche il valore

$$\boldsymbol{g}_h\Big(\,\boldsymbol{g}_{\ell_1}(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)\,,\ldots,\ \boldsymbol{g}_{\ell_m}(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)\,\Big)\,,$$

quest'ultimo verrà a coincidere con $\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)$;
altrimenti $\boldsymbol{g}_i(\,n_1\,,\ldots,\ n_{a_i}\,)$ rimarrà *non definito*;

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(5) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***ricorsione primitiva*** da funzioni $\boldsymbol{g}_h$ e $\boldsymbol{g}_\ell$, con $h, \ell < i$, dove le arità a_i, a_h, a_ℓ di i, h, ℓ sono cosí legate fra loro: $a_\ell = a_i + 1 = a_h + 2$. Cioè a dire, $\boldsymbol{g}_i$ risulta definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(n_1, \ldots, n_{a_h}, 0) & = \boldsymbol{g}_h(n_1, \ldots, n_{a_h}), \\ \boldsymbol{g}_i(n_1, \ldots, n_{a_h}, n+1) & = \boldsymbol{g}_\ell\Big(n_1, \ldots, n_{a_h}, n, \boldsymbol{g}_i(n_1, \ldots, n_{a_h}, n)\Big), \end{cases}$$

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(5) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***ricorsione primitiva*** da funzioni $\boldsymbol{g}_h$ e $\boldsymbol{g}_\ell$, con $h, \ell < i$, dove le arità a_i, a_h, a_ℓ di i, h, ℓ sono cosí legate fra loro: $a_\ell = a_i + 1 = a_h + 2$. Cioè a dire, $\boldsymbol{g}_i$ risulta definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, 0\,) & = \quad \boldsymbol{g}_h(\, n_1, \ldots, n_{a_h}\,)\,, \\ \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n+1\,) & = \quad \boldsymbol{g}_\ell\Big(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n, \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n\,)\Big)\,, \end{cases}$$

che, per ogni a_h-upla $\langle\, n_1, \ldots, n_{a_h} \,\rangle$ di numeri, consente di determinare il valore $\boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_i}, 0)$ sse $\boldsymbol{g}_h(\, n_1, \ldots, n_{a_h}\,)$ è definito e, in tal caso, fornisce anche i valori $\boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, m\,)$ per $m = 1, 2, 3, \ldots$,

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(5) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***ricorsione primitiva*** da funzioni $\boldsymbol{g}_h$ e $\boldsymbol{g}_\ell$, con $h, \ell < i$, dove le arità a_i, a_h, a_ℓ di i, h, ℓ sono cosí legate fra loro: $a_\ell = a_i + 1 = a_h + 2$. Cioè a dire, $\boldsymbol{g}_i$ risulta definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, 0\,) & = \quad \boldsymbol{g}_h(\, n_1, \ldots, n_{a_h}\,)\,, \\ \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n+1\,) & = \quad \boldsymbol{g}_\ell\Big(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n, \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, n\,)\Big)\,, \end{cases}$$

che, per ogni a_h-upla $\langle\, n_1, \ldots, n_{a_h}\,\rangle$ di numeri, consente di determinare il valore $\boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_i}, 0)$ sse $\boldsymbol{g}_h(\, n_1, \ldots, n_{a_h}\,)$ è definito e, in tal caso, fornisce anche i valori

$\boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, m\,)$ per $m = 1, 2, 3, \ldots$,

sin quando—se mai ciò accade—non risulti indefinito

$\boldsymbol{g}_\ell\Big(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, m-1, \boldsymbol{g}_i(\, n_1, \ldots, n_{a_h}, m-1\,)\Big)$;

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞

(6) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***minimalizzazione*** da una funzione $\boldsymbol{g}_\ell$, con $\ell < i$, dove vige $a_\ell = a_i + 1$ fra le arità di $\boldsymbol{g}_\ell$ e di $\boldsymbol{g}_i$.

Indichiamo con $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ la funzione

$$\langle \vec{x}, m \rangle \quad \xmapsto{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i} \quad \min_{n \geqslant m} \quad \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$$

di arità a_ℓ

☞

(6) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***minimalizzazione*** da una funzione $\boldsymbol{g}_\ell$, con $\ell < i$, dove vige $a_\ell = a_i + 1$ fra le arità di $\boldsymbol{g}_\ell$ e di $\boldsymbol{g}_i$.
Indichiamo con $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ la funzione

$$\langle \vec{x}, m \rangle \quad \overset{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i}{\longmapsto} \quad \min_{n \geqslant m} \quad \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$$

di arità a_ℓ tale che $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1, \ldots, n_{a_i}, m)$ è definita sse vi è un $n \geqslant m$ tale che

- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, n \,) \; = \; 0$ ed inoltre (se $n > m$)
- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, m \,)$, $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, m+1 \,)$, . . . , $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, n-1 \,)$ sono tutti definiti e diversi da 0.

☞

(6) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***minimalizzazione*** da una funzione $\boldsymbol{g}_\ell$, con $\ell < i$, dove vige $a_\ell = a_i + 1$ fra le arità di $\boldsymbol{g}_\ell$ e di $\boldsymbol{g}_i$.
Indichiamo con $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ la funzione

$$\langle \vec{x}, m \rangle \xmapsto{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i} \min_{n \geqslant m} \quad \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$$

di arità a_ℓ tale che $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1, \ldots, n_{a_i}, m)$ è definita sse vi è un $n \geqslant m$ tale che

- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; n \,) \; = \; 0$ ed inoltre (se $n > m$)
- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; m \,)$, $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; m+1 \,) \,, \ldots,$ $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; n-1 \,)$ sono tutti definiti e diversi da 0.

Quando queste condizioni sono soddisfatte definiamo:

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; m) \; = \; n \,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

☞
(6) $\boldsymbol{g}_i$ è ottenuta per ***minimalizzazione*** da una funzione $\boldsymbol{g}_\ell$, con $\ell < i$, dove vige $a_\ell = a_i + 1$ fra le arità di $\boldsymbol{g}_\ell$ e di $\boldsymbol{g}_i$.
Indichiamo con $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ la funzione

$$\langle \vec{x}, m \rangle \quad \stackrel{\widetilde{\boldsymbol{g}}_i}{\longmapsto} \quad \min_{n \geqslant m} \quad \boldsymbol{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$$

di arità a_ℓ tale che $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(n_1, \ldots, n_{a_i}, m)$ è definita sse vi è un $n \geqslant m$ tale che

- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, n \,) \; = \; 0$ ed inoltre (se $n > m$)
- $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, m \,)$, $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, m+1 \,) \,, \ldots,$ $\boldsymbol{g}_\ell(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \, n-1 \,)$ sono tutti definiti e diversi da 0.

Quando queste condizioni sono soddisfatte definiamo:

$$\widetilde{\boldsymbol{g}}_i(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; m) \; = \; n \,.$$

Si avrà allora, per come va intesa la minimalizzazione, che

$$\boldsymbol{g}_i(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,) \; = \; \widetilde{\boldsymbol{g}}_i(\, n_1 \,, \ldots, \, n_{a_i} \,, \; 0 \,) \,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Supponendo che per ogni x in $\mathbb{N}$ ed ogni y in $\mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{g}_0(x) \;=\; 0$,

queste funzioni sono parzialm. computabili ?

Supponendo che per ogni x in $\mathbb{N}$ ed ogni y in $\mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{g}_0(\,x\,) \;=\; 0$,
- $\boldsymbol{g}_1(\,x\,) \;=\; x+1$,

queste funzioni sono parzialm. computabili ?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Qualche esempio (di cui uno estremo)

Supponendo che per ogni x in $\mathbb{N}$ ed ogni y in $\mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{g}_0(\, x \,) \;=\; 0$,
- $\boldsymbol{g}_1(\, x \,) \;=\; x+1$,
- $\boldsymbol{g}_2(\, x \,,\, y \,) \;=\; x$,

queste funzioni sono parzialm. computabili ?

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Supponendo che per ogni x in $\mathbb{N}$ ed ogni y in $\mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{g}_0(x) \;=\; 0$,
- $\boldsymbol{g}_1(x) \;=\; x+1$,
- $\boldsymbol{g}_2(x, y) \;=\; x$,
- $\boldsymbol{g}_3(x, y) \;=\; x+1$,

queste funzioni sono parzialm. computabili ?

Supponendo che per ogni x in $\mathbb{N}$ ed ogni y in $\mathbb{N}$:

- $\boldsymbol{g}_0(x) = 0$,
- $\boldsymbol{g}_1(x) = x+1$,
- $\boldsymbol{g}_2(x, y) = x$,
- $\boldsymbol{g}_3(x, y) = x+1$,
- $\boldsymbol{g}_4(x)$ non sia definito ,

queste funzioni sono parzialm. computabili ?

Mostrare che sono parzialm. computabili le funzioni qui specificate tramite clausole di Horn:

$$\mathsf{suc}\Big(\,\mathsf{s}(\,X\,)\,,\ X\,\Big)\,;$$

Mostrare che sono parzialm. computabili le funzioni qui specificate tramite clausole di Horn:

$$\mathsf{suc}\Big(\mathsf{s}(\,X\,)\,,\;X\Big)\,;$$

$$\begin{array}{lcll} +(\,R\,,\;X\,,\;Y\,) & \leftarrow & \mathsf{suc}(\,X\,,\;P\,) & \wedge \\ & & +(\,Q\,,\;P\,,\;Y\,) & \wedge \\ & & \mathsf{suc}(\,R\,,\;Q\,)\,, & \end{array}$$

$$+(\,Y\,,\;0\,,\;Y\,)\,;$$

Mostrare che sono parzialm. computabili le funzioni qui specificate tramite clausole di Horn:

$$\mathrm{suc}\Big(\mathrm{s}(X), X\Big);$$

$$\begin{array}{lcll} +(R, X, Y) & \leftarrow & \mathrm{suc}(X, P) & \wedge \\ & & +(Q, P, Y) & \wedge \\ & & \mathrm{suc}(R, Q), & \\ +(Y, 0, Y); & & & \\ *(R, X, Y) & \leftarrow & +(X, A_1, A_2) & \wedge \\ & & *(R_1, A_1, Y) & \wedge \\ & & *(R_2, A_2, Y) & \wedge \\ & & +(R, R_1, R_2), & \\ *(0, 0, Y), & & & \\ *(Y, \mathrm{s}(0), Y). & & & \end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

The claim that each of the standard formal characterizations provides satisfactory counterparts to the informal notions of *algorithm* and *algorithmic function* cannot be proved. It must be accepted or rejected on grounds that are, in large part, empirical. (That the claim for one charac-

. . . .

see question *10 in §1.1.) On the basis of this evidence, many mathematicians have accepted the claim that the standard characterizations give a satisfactory formalization, or "rational reconstruction," of the (necessarily vague) informal notions. This claim is often referred to as *Church's Thesis*. Church's Thesis may be viewed as a *proposal* as well as a claim, a proposal that we agree henceforth to supply certain previously intuitive terms (e.g., "function computable by algorithm") with certain precise meanings.

[Rogers(1967), pag. 20]

Completezza di Turing
della programmaz.
tramite clausole
di Horn

(S.-Å. Tjärnlund, 1976/77)
(J. Šebelík & P. Štěpánek, 1982)

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ogni lista di $\boldsymbol{g}_i$ del tipo su descritto, costruiremo basi

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & = & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{B}_1 & \subset & \mathcal{B}_2 & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{B}_{M+1} \\ & & & \boldsymbol{g}_0 & & \boldsymbol{g}_1 & & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_M & \end{array}$$

di clausole

Per ogni lista di g_i del tipo su descritto, costruiremo basi

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & = & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{B}_1 & \subset & \mathcal{B}_2 & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{B}_{M+1} \\ & & & g_0 & & g_1 & & g_2 & \cdots & g_M & \end{array}$$

di clausole nella quale compariranno solo la costante **0**, il funtore monadico s(_) di *successore* e letterali

$$p_i(\, t_0\,, \ldots,\, t_{a_i}\,)\,, \quad q_i(\, t_0\,, \ldots,\, t_{a_i+1}\,)$$

e relative negazioni, dove $i = 0\,, 1\,, \ldots,\, M$.

Per ogni lista di $\boldsymbol{g}_i$ del tipo su descritto, costruiremo basi

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & = & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{B}_1 & \subset & \mathcal{B}_2 & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{B}_{M+1} \\ & & & \boldsymbol{g}_0 & & \boldsymbol{g}_1 & & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_M & \end{array}$$

di clausole nella quale compariranno solo la costante **0**, il funtore monadico s(_) di *successore* e letterali

$$p_i(\, t_0\,, \ldots, \, t_{a_i}\,)\,, \quad q_i(\, t_0\,, \ldots, \, t_{a_i+1}\,)$$

e relative negazioni, dove $i = 0\,, 1\,, \ldots, \, M$.

Ciascun simbolo predicativo p_i sta a rappresentare, nelle nostre intenzioni, la funzione $\boldsymbol{g}_i$, mentre il simbolo q_i svolge un ruolo ausiliario e rappresenta la funzione $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ quando $\boldsymbol{g}_i$ è definita per minimalizzazione.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Per ogni lista di $\boldsymbol{g}_i$ del tipo su descritto, costruiremo basi

$$\begin{array}{ccccccccccc} \emptyset & = & \mathcal{B}_0 & \subset & \mathcal{B}_1 & \subset & \mathcal{B}_2 & \subset & \cdots & \subset & \mathcal{B}_{M+1} \\ & & & \boldsymbol{g}_0 & & \boldsymbol{g}_1 & & \boldsymbol{g}_2 & \cdots & \boldsymbol{g}_M & \end{array}$$

di clausole nella quale compariranno solo la costante $\mathbf{0}$, il funtore monadico $\mathsf{s}(\_)$ di *successore* e letterali

$$p_i(\, t_0\,, \ldots,\, t_{a_i}\,)\,, \quad q_i(\, t_0\,, \ldots,\, t_{a_i+1}\,)$$

e relative negazioni, dove $i = 0\,, 1\,, \ldots,\, M$.

Ciascun simbolo predicativo p_i sta a rappresentare, nelle nostre intenzioni, la funzione $\boldsymbol{g}_i$, mentre il simbolo q_i svolge un ruolo ausiliario e rappresenta la funzione $\widetilde{\boldsymbol{g}}_i$ quando $\boldsymbol{g}_i$ è definita per minimalizzazione.

Ogni $\mathcal{B}_{i+1}$ verrà a specificare la $\boldsymbol{g}_i$.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

I termini cosí definiti:

$$\begin{array}{rcl} \underline{0} & =_{\text{Def}} & \mathbf{0}\,, \\ \underline{m+1} & =_{\text{Def}} & \mathsf{s}(\underline{m})\,, \end{array}$$

designano in modo univoco tutti i numeri naturali. Formano un universo di Herbrand: l'universo dei *numerali* (in base 1).

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

I termini cosí definiti:

$$\begin{aligned} \underline{0} &=_{\text{Def}} \mathbf{0}\,, \\ \underline{m+1} &=_{\text{Def}} \mathsf{s}(\underline{m})\,, \end{aligned}$$

designano in modo univoco tutti i numeri naturali. Formano un universo di Herbrand: l'universo dei *numerali* (in base 1).

La nostra costruzione dei $\mathcal{B}_i$ sarà tale che ogni domanda della forma $\neg\, p_i(\, Y\,, \underline{n_1}\,, \ldots, \underline{n_{a_i}}\,)$ ammetta risposte corrette se e solo se $\boldsymbol{g}_i(\, n_1\,, \ldots, \, n_{a_i}\,)$ è definito, in tal caso avendo come unica risposta la sostituzione

$$Y \;\mapsto\; \underline{\boldsymbol{g}_i(\, n_1\,, \ldots, \, n_{a_i}\,)}\,.$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati piú su quali siano le clausole che formano

$$\mathcal{B}_{i+1} \quad \setminus \quad \mathcal{B}_i$$

(quando i ricade in piú di un caso, ci si regoli a piacere):

☞

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati piú su quali siano le clausole che formano

$$\mathcal{B}_{i+1} \quad \setminus \quad \mathcal{B}_i$$

(quando i ricade in piú di un caso, ci si regoli a piacere):

(1) $p_i(\mathbf{0}, X)$;

☞

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati piú su quali siano le clausole che formano

$$\mathcal{B}_{i+1} \quad \setminus \quad \mathcal{B}_i$$

(quando i ricade in piú di un caso, ci si regoli a piacere):

(1) $p_i(\mathbf{0}, X)$;

(2) $p_i(\mathrm{s}(X), X)$;

☞

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati piú su quali siano le clausole che formano

$$\mathcal{B}_{i+1} \quad \setminus \quad \mathcal{B}_i$$

(quando i ricade in piú di un caso, ci si regoli a piacere):

(1) $p_i(\, \mathbf{0}\, ,\ X\,)$;

(2) $p_i(\, \mathsf{s}(X)\, ,\ X\,)$;

(3) $p_i(\, X_j\, ,\ X_1\, , \ldots ,\ X_{a_i}\,)$;

☞

$$(4) \quad p_i(\, Y\,,\ X_1\,,\ldots,\ X_{a_i}\,) \quad \leftarrow$$

$$\begin{array}{ll}
p_h(\, Y\,,\ Y_{\ell_1}\,,\ldots,\ Y_{\ell_{a_h}}\,) & \& \\
p_{\ell_1}(\, Y_{\ell_1}\,,\ X_1\,,\ldots,\ X_{a_i}\,) & \& \\
\ \cdots & \\
\quad \cdots & \& \\
p_{\ell_{a_h}}(\, Y_{\ell_{a_h}}\,,\ X_1\,,\ldots,\ X_{a_i}\,)\,; &
\end{array}$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$(4) \quad p_i(\, Y \,,\, X_1 \,, \ldots ,\, X_{a_i} \,) \quad \leftarrow$$

$$\begin{array}{ll}
p_h(\, Y \,,\; Y_{\ell_1} \,, \ldots ,\; Y_{\ell_{a_h}} \,) & \& \\
p_{\ell_1}(\, Y_{\ell_1} \,,\; X_1 \,, \ldots ,\; X_{a_i} \,) & \& \\
\quad \ldots & \\
\qquad \ldots & \& \\
p_{\ell_{a_h}}(\, Y_{\ell_{a_h}} \,,\; X_1 \,, \ldots ,\; X_{a_i} \,)\,; &
\end{array}$$

$$(5) \quad p_i(\, Y \,,\, X_1 \,, \ldots ,\, X_{a_h} \,,\, \mathbf{0} \,) \leftarrow p_h(\, Y \,,\, X_1 \,, \ldots ,\, X_{a_h} \,)\,,$$

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

$$(4)\quad p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)\quad\leftarrow$$

$$\begin{array}{ll}
p_h(\,Y\,,\,Y_{\ell_1}\,,\ldots,\,Y_{\ell_{a_h}}\,) & \& \\
p_{\ell_1}(\,Y_{\ell_1}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,) & \& \\
\quad\cdots & \\
\qquad\cdots & \& \\
p_{\ell_{a_h}}(\,Y_{\ell_{a_h}}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,)\,; &
\end{array}$$

$$(5)\quad p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,\mathbf{0}\,)\leftarrow p_h(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,)\,,$$

$$p_i(\,Y_\ell\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,\mathsf{s}(X)\,)\leftarrow$$

$$\begin{array}{l}
p_\ell(\,Y_\ell\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,X\,,\,Y_i\,)\,\& \\
p_i(\,Y_i\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_h}\,,\,X\,)\,;
\end{array}$$

$$(6)\quad p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,) \leftarrow q_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathbf{0}\,)\,,$$

—Fine della costruzione / dimostrazione—

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

(6) $p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,) \leftarrow q_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathbf{0}\,)\,,$

$q_i(\,Z\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,) \leftarrow p_\ell(\,\mathbf{0}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,Z\,)\,,$

—Fine della costruzione / dimostrazione—

$$(6)\quad p_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,) \leftarrow q_i(\,Y\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathbf{0}\,)\,,$$

$$q_i(\,Z\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\;Z\,) \leftarrow p_\ell(\,\mathbf{0}\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\;Z\,)\,,$$

$$q_i(\,Y_i\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\;Z\,) \leftarrow$$

$$p_\ell(\,\mathsf{s}(Y)\,,\,X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\;Z\,)\;\&$$
$$q_i(\,Y_i\,,\;X_1\,,\ldots,\,X_{a_i}\,,\,\mathsf{s}(Z)\,)\,.$$

—Fine della costruzione / dimostrazione—

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE

Indecidibilità
della logica predicativa
del 1º ordine

$\longrightarrow$

La vedremo ben presto

UNIVERSITÀ
DEGLI STUDI DI TRIESTE

Martin D. Davis, Ron Sigal, and Elaine J. Weyuker.
Computability, complexity, and languages - Fundamentals of theoretical computer science.
Computer Science ad scientific computing. Academic Press, 1994.

J.W. Lloyd.
Foundations of Logic Programming.
Springer-Verlag, Berlin, 2nd edition, 1987.

Hartley Rogers, Jr.
Theory of Recursive Functions and Effective Computability.
Series in Higher Mathematics. McGraw-Hill, 1967.

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI TRIESTE