

## Completezza di Turing della programmazione tramite clausole di Horn

|| Ogni funzione  $\mathbf{g}$  parzialmente computabile  
 || sui numeri naturali è definibile alla Horn.

**Dim.** Ci contenteremo di delineare la dimostrazione, senza scendere in particolari. Le idee della dimostrazione dovrebbero comunque risultare intuitivamente chiare.

Cominciamo col richiamare che  $\mathbf{g}$  è PARZIALMENTE COMPUTABILE sui naturali sse esiste una lista

$$\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_M,$$

con  $M$  numero naturale qualsiasi e  $\mathbf{g}_M = \mathbf{g}$ , di funzioni  $\mathbf{g}_i$  tali che ogni  $i = 0, \dots, M$  soddisfi almeno una delle sei condizioni elencate qui sotto:

- (1)  $\mathbf{g}_i$  è la funzione di arità  $a_i = 1$  che manda ogni numero nello 0;  $n \mapsto 0$
- (2)  $\mathbf{g}_i$  è la funzione di arità  $a_i = 1$  che manda ciascun numero  $n$  nel suo successore immediato  $n + 1$ ;  $n \mapsto n + 1$
- (3)  $\mathbf{g}_i$  è la funzione di arità  $a_i > 0$  che manda—per qualche  $j$  con  $0 < j \leq a_i$ — ogni  $a_i$ -upla  $\langle n_1, \dots, n_{a_i} \rangle$  di numeri nella  $j$ -sima componente,  $n_j$ ;  $\langle n_1, \dots, n_{a_i} \rangle \mapsto n_j$
- (4)  $\mathbf{g}_i$  è ottenuta per *composizione* da funzioni

$$\mathbf{g}_h, \mathbf{g}_{\ell_0}, \dots, \mathbf{g}_{\ell_m}, \quad \text{con } h, \ell_0, \dots, \ell_m < i,$$

dove ciascuna delle  $\mathbf{g}_{\ell_k}$  ha arità uguale all'arietà  $a_i$  di  $\mathbf{g}_i$ , mentre  $\mathbf{g}_h$  ha arità  $a_h = m + 1$ .

Ciò significa che se in  $\langle n_1, \dots, n_{a_i} \rangle$  tutte le  $\mathbf{g}_{\ell_k}$  sono definite, e definito è anche il valore

$$\mathbf{g}_h \left( \mathbf{g}_{\ell_0}(n_1, \dots, n_{a_i}), \dots, \mathbf{g}_{\ell_m}(n_1, \dots, n_{a_i}) \right),$$

quest'ultimo valore verrà a coincidere con  $\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i})$ ; altrimenti  $\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i})$  rimarrà non definito;

- (5)  $\mathbf{g}_i$  è ottenuta per *ricorsione primitiva* da funzioni  $\mathbf{g}_h$  e  $\mathbf{g}_\ell$ , con  $h, \ell < i$ , dove le arità  $a_i, a_h, a_\ell$  di  $i, h, \ell$  sono così legate fra loro:  $a_\ell = a_i + 1 = a_h + 2$ .

Cioè a dire,  $\mathbf{g}_i$  risulta definita dalla ricorrenza

$$\begin{cases} \mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, 0) & = \mathbf{g}_h(n_1, \dots, n_{a_h}), \\ \mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, n+1) & = \mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_h}, n, \mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, n)), \end{cases}$$

che, per ogni  $a_h$ -upla  $\langle n_1, \dots, n_{a_h} \rangle$  di numeri, consente di determinare il valore  $\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, 0)$  sse  $\mathbf{g}_h(n_1, \dots, n_{a_h})$  è definito e, in tal caso, fornisce anche i valori  $\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, m)$  per  $m = 1, 2, 3, \dots$ , sin quando—se mai ciò accade—non risulti *indefinito*

$$\mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_h}, m-1, \mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_h}, m-1));$$

- (6)  $\mathbf{g}_i$  è ottenuta per *minimalizzazione* da una funzione  $\mathbf{g}_\ell$ , con  $\ell < i$ , dove  $\vec{x} \mapsto \min_{n \geq 0} \mathbf{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$  vige  $a_\ell = a_i + 1$  fra le arità di  $\mathbf{g}_\ell$  e di  $\mathbf{g}_i$ .

Indichiamo con  $\tilde{\mathbf{g}}_i$  la funzione di arità  $a_\ell$  tale che  $\tilde{\mathbf{g}}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, m)$  è definita sse vi è un  $n \geq m$  tale che  $(\vec{x}, m) \mapsto \min_{n \geq m} \mathbf{g}_\ell(\vec{x}, n) = 0$

- $\mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, n) = 0$  ed inoltre (se  $n > m$ )
- $\mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, m), \mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, m+1), \dots, \mathbf{g}_\ell(n_1, \dots, n_{a_i}, n-1)$  sono tutti definiti e diversi da 0.

Quando queste condizioni sono soddisfatte poniamo  $\tilde{\mathbf{g}}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, m) = n$  per definizione.

Si avrà allora, per come va intesa la minimalizzazione, che

$$\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i}) = \tilde{\mathbf{g}}_i(n_1, \dots, n_{a_i}, 0),$$

per ogni  $a_i$ -upla  $\langle n_1, \dots, n_{a_i} \rangle$ .

Per ogni lista  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_M$  del tipo su descritto, costruiremo una base  $\mathcal{B}$  di clausole nella quale compariranno solo la costante  $\mathbf{0}$ , il funtore monadico  $\mathbf{s}(\_)$  e letterali

$$p_i(t_0, \dots, t_{a_i}), \quad q_i(t_0, \dots, t_{a_i+1})$$

e relative negazioni, dove  $i = 0, 1, \dots, M$ . Ciascun simbolo predicativo  $p_i$  sta a rappresentare, nelle nostre intenzioni, la funzione  $\mathbf{g}_i$ , mentre il simbolo  $q_i$  svolge un ruolo ausiliario e rappresenta la funzione  $\tilde{\mathbf{g}}_i$  quando  $\mathbf{g}_i$  è definita per minimalizzazione. Introduciamo i *numerali*, ponendo  $\underline{0} =_{\text{Def}} \mathbf{0}$  ed  $\underline{m+1} =_{\text{Def}} \mathbf{s}(\underline{m})$  per ogni numero naturale  $m$ . La nostra costruzione di  $\mathcal{B}$  sarà tale che ogni domanda della forma  $\neg p_i(Y, \underline{n}_1, \dots, \underline{n}_{a_i})$  ammetta risposte corrette se e solo se  $\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i})$  è definito, in tal caso avendo come unica risposta la sostituzione  $Y \mapsto \underline{\mathbf{g}_i(n_1, \dots, n_{a_i})}$ .

La costruzione procede per tappe. Poniamo, per cominciare,  $\mathcal{B}_0 = \emptyset$ . All' $i$ -sima tappa della costruzione otterremo  $\mathcal{B}_{i+1}$  aggiungendo a  $\mathcal{B}_i$  le clausole definiti  $p_i$  (assieme a  $q_i$ , se serve). Alla fine della  $M$ -sima tappa si porrà  $\mathcal{B} = \mathcal{B}_{M+1}$ , la cui esistenza dimostra ciò che ci interessa, ossia che  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_M$  è definibile alla Horn.

Indichiamo per ciascuno dei casi (1)–(6) contemplati più su quali siano le clausole che formano  $\mathcal{B}_{i+1} \setminus \mathcal{B}_i$  (se  $i$  ricade in più di un caso, ci si regola utilizzando solo il caso che viene per primo):

$$(1) \quad p_i(\mathbf{0}, X);$$

$$(2) \quad p_i(\mathbf{s}(X), X);$$

$$(3) \quad p_i(X_j, X_1, \dots, X_{a_i});$$

$$(4) \quad p_i(Y, X_1, \dots, X_{a_i}) \leftarrow$$

$$\begin{array}{ll} p_h(Y, Y_{\ell_1}, \dots, Y_{\ell_{a_h}}) & \& \\ p_{\ell_0}(Y_{\ell_0}, X_1, \dots, X_{a_i}) & \& \\ \dots & \\ \dots & \& \\ p_{\ell_{a_h}}(Y_{\ell_{a_h}}, X_1, \dots, X_{a_i}); & \end{array}$$

$$(5) \quad p_i(Y, X_1, \dots, X_{a_h}, \mathbf{0}) \leftarrow p_h(Y, X_1, \dots, X_{a_h}),$$

$$p_i(Y_\ell, X_1, \dots, X_{a_h}, \mathbf{s}(X)) \leftarrow$$

$$\begin{array}{l} p_\ell(Y_\ell, X_1, \dots, X_{a_h}, X, Y_i) \& \\ p_i(Y_i, X_1, \dots, X_{a_h}, X); \end{array}$$

$$(6) \quad p_i(Y, X_1, \dots, X_{a_i}) \leftarrow q_i(Y, X_1, \dots, X_{a_i}, \mathbf{0}),$$

$$q_i(Z, X_1, \dots, X_{a_i}, Z) \leftarrow p_\ell(\mathbf{0}, X_1, \dots, X_{a_i}, Z),$$

$$q_i(Y_i, X_1, \dots, X_{a_i}, Z) \leftarrow$$

$$\begin{array}{l} p_\ell(\mathbf{s}(Y), X_1, \dots, X_{a_i}, Z) \& \\ q_i(Y_i, X_1, \dots, X_{a_i}, \mathbf{s}(Z)). \end{array}$$

—Fine della costruzione / dimostrazione—

## Riepilogo sinottico

Funzioni iniziali (dove  $0 < j \leq a$ ):

$$\begin{aligned} & \mathbf{zero}(\mathbf{0}, X). \\ & \mathbf{succ}(s(X), X). \\ & \mathbf{proj}_{a,j}(X_j, X_1, \dots, X_a). \end{aligned}$$

Composizione di funzioni:

$$\begin{aligned} \mathbf{comp}_{g,f}(Y, X_1, \dots, X_a) \leftarrow & \begin{aligned} & g(Y, F_0, \dots, F_m), \\ & f_0(F_0, X_1, \dots, X_a), \\ & \dots \dots \dots \dots \dots \\ & f_m(F_m, X_1, \dots, X_a). \end{aligned} \end{aligned}$$

Ricorsione primitiva:

$$\begin{aligned} \mathbf{ricors}_{base,elab}(Y, X_1, \dots, X_{a-1}, 0) & \leftarrow base(Y, X_1, \dots, X_{a-1}). \\ \mathbf{ricors}_{base,elab}(Y, X_1, \dots, X_{a-1}, s(X_a)) & \leftarrow \mathbf{ricors}_{base,elab}(R, X_1, \dots, X_a), \\ & \quad elab(Y, X_1, \dots, X_a, R). \end{aligned}$$

Minimizzazione:

$$\begin{aligned} \mathbf{min}_f(Y, X_1, \dots, X_a) & \leftarrow \mathbf{min}_f^+(Y, X_1, \dots, X_a, \mathbf{0}). \\ \mathbf{min}_f^+(X_{a+1}, X_1, \dots, X_a, X_{a+1}) & \leftarrow f(\mathbf{0}, X_1, \dots, X_a, X_{a+1}). \\ \mathbf{min}_f^+(Y, X_1, \dots, X_a, X_{a+1}) & \leftarrow \begin{aligned} & f(s(-), X_1, \dots, X_a, X_{a+1}), \\ & \mathbf{min}_f^+(Y, X_1, \dots, X_a, s(X_{a+1})). \end{aligned} \end{aligned}$$