Oss. Se $\underline{f : \Omega \to D}$ è mappa conforme e $g \in H(D)$ allora

$$g \circ f \in H(\Omega)$$

Sia u armonica su D allora

$$U = u \circ f \quad \text{è armonica in } \Omega.$$

$$\underline{\partial_z \partial_{\bar z} u \circ f} = \underline{\partial_w \partial_{\bar w} u} \, |\partial_z f|^2$$

$$\partial_z (\partial_{\bar z} u \circ f) = \partial_z \Big(\partial_w u \underbrace{\frac{\partial f}{\partial \bar z}}_{=0} + \underline{\partial_{\bar w} u \frac{\partial \bar f}{\partial \bar z}} \Big)$$

In particolare se $\boxed{f : B_1 \to D}$ è conforme e $f \in C(\overline{B_1})$, possiamo risolvere il pb. di Dirichlet su D.

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{in } D \\ u = \varphi & \text{su } \partial D \end{cases}$$

$\mathcal{U} = u \circ f$

$$\begin{cases} \Delta \mathcal{U} = 0 & \text{in } B_1 \\ \mathcal{U} = \varphi \circ f & \text{su } \partial B_1 \end{cases}$$

$$\mathcal{U}(z) = \int_{\partial B_1} P(z;\xi)\, \varphi \circ f(\xi)\, |d\xi|$$

$u(w) = \mathcal{U} \circ f^{-1}(w)$ risolve il pb. di Dirichlet in D.

<u>Lemma di Schwarz.</u>

Sia $f \in H(B_1)$ t.c. $f(0) = 0$ e $|f(z)| \leq 1$ $\forall z \in B_1$. Allora:

i) $|f'(0)| \leq 1$

ii) $|f(z)| \leq |z| \quad \forall z \in B_1$

Inoltre: se $|f'(0)| = 1$ oppure esiste $z \neq 0$ t.c. $|f(z)| = |z|$ allora $\exists\ \theta \in \mathbb{R}$

$$f(z) = e^{i\theta} z$$

Dim. Poniamo per $z \neq 0$

$$g(z) = \frac{f(z)}{z}$$

per $z \to 0$ $\quad g(z) \to f'(0) \in \mathbb{C}$

quindi 0 è una sing rimovibile per g

Posto:
$$g(z) = \begin{cases} f(z)/z & z \neq 0 \\ f'(0) & z = 0 \end{cases}$$

risulta $\quad g \in H(B_1)$.

Prendiamo ρ, $0<\rho<1$ e $z \in B_\rho(0)$

$$|g(z)| \leq \max_{\partial B_\rho(0)} |g| \leq \frac{1}{\rho} \to 1, \ \rho \to 1$$

Quindi $\quad |g(z)| \leq 1 \quad \forall z \in B_1$

Allora $\forall\ z \neq 0$

$$|f(z)| \leq |z| \qquad (ii)$$

e per $z=0$

$$|f'(0)| \leq 1 \qquad (i)$$

Supp. che in (i) o in (ii) valga l'=

ovvero che $\exists\ z \in B_1(0)$ t.c.

$$|g(z)| = 1$$

Per il principio di max modulo, $g \equiv \text{cost.}$

ovvero

$$g(z) = e^{i\vartheta} \quad \text{per qualche } \vartheta \in \mathbb{R}.$$

$$f(z) = e^{i\vartheta} z. \qquad \square$$

Def. $f : B_1 \to B_1$ si dice <u>automorfismo</u> del disco se è una mappa conforme di B_1 in sé.

Teor. Sia f automorf. del disco B_1. Allora esistono $\varphi \in \mathbb{R}$, $c \in B_1$ t.c.

$$f(z) = e^{i\varphi} \frac{z - c}{1 - \bar{c} z}$$

NB. Il denom. si annulla solo per

$$z = \frac{1}{\bar{c}} \notin B_1 .$$

Poniamo

$$\varphi_c(z) = \frac{z - c}{1 - \bar{c} z}, \quad c \in B_1$$

$\varphi_c \in H(B_1)$, $\varphi_c(c) = 0$

Osserviamo che $\varphi_c : B_1 \to B_1$ è invertibile.

Posto $w \in B_1$, risolviamo :

$$\varphi_c(z) = w$$

$$\underline{z - c} = w(1 - \bar{c}\underline{z})$$

$$z + w\bar{c}z = w + c$$

$$z(1 + w\bar{c}) = w + c$$

$$z = \frac{w + c}{1 + \bar{c}w} = \varphi_{-c}(w) \,!$$

Quindi φ_c è un automorfismo e

$$\varphi_c^{-1} = \varphi_{-c}$$

Sia $f : B_1 \to B_1$ automorfismo e sia

$$b = f(0)$$

Sia

$$\varphi_b(z) = \frac{z - b}{1 - \bar{b} z}$$

$$\varphi_b \circ f(0) = 0$$

Quindi ad $h = \varphi_b \circ f$ possiamo applicare il Lemma di Schwarz

$h : B_1 \to B_1$ è un autom.

t.c. $h(0) = 0$

allora anche $h^{-1} : B_1 \to B_1$ è autom.

t.c. $h^{-1}(0) = 0$

Per Schwarz

$$|h'(0)| \leq 1$$

e

$$|(h^{-1})'(0)| \leq 1$$

$\backslash\backslash$

Ora

$$(h^{-1})'(0) = \frac{1}{h'(0)}$$

Quindi $\quad |h'(0)| \leq 1$

$$\frac{1}{|h'(0)|} \leq 1$$

Cioè $\quad |h'(0)| = 1 \Longrightarrow h(z) = e^{i\vartheta} z$

per qualche ϑ

$$\varphi_b \circ f(z) = e^{i\vartheta} z$$

$$f(z) = \varphi_{-b}(\underline{e^{i\vartheta} z}) =$$

$$= \frac{e^{i\vartheta} z + b}{1 + \bar{b} e^{i\vartheta} z} = e^{i\vartheta} \frac{(z + b e^{-i\vartheta})}{(1 + \overline{(b e^{-i\vartheta})} z)}$$

$c = -b e^{-i\vartheta}$!

$$f(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - c}{1 - \bar{c} z}$$ $\square$

<u>Lemma.</u> Non esistono mappe conformi
$$f : B_1 \to \mathbb{C}$$

<u>Dim.</u>: $\underline{\underline{g}} = f^{-1}$

$$g : \mathbb{C} \to B_1$$

$g \in H(\mathbb{C})$, $|g| \leq 1$, per Liouville

$g = \text{cost.}$ non è invertibile! $\square$

—·—

Trasformaz. lineari fratte (o di Möbius)

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad ad - bc \neq 0$$

Casi particolari : $w = az + b$ (tr. lineari)

$w = \frac{1}{z}$ (inversione).

Ogni trasf. di Möbius è composiz. di trasf. lineari e dell'inversione :

Se $c \neq 0$

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{\frac{a}{c}cz + b}{cz+d} =$$

$$= \frac{a}{c} + \frac{b - \frac{a}{c}d}{cz+d} = \overbrace{\frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{\underbrace{c^2z+dc}_{\text{lin.}}}}^{\text{trasf. lin.}}$$

inves.

Le trasf. lineari trasf. rette in rette e circonf. in circonf.

Come si comporta l'inversione su rette e circonf. ?

Consid la circonf. :

$$|z - z_0|^2 = r^2$$

$$(z - z_0)\overline{(z - z_0)} = r^2$$

$$z\bar{z} - 2\,\mathrm{Re}(z_0\bar{z}) + |z_0|^2 = r^2$$

$$w = \frac{1}{z}$$

$$\frac{1}{w\bar{w}} - 2\,\mathrm{Re}\left(\frac{z_0}{\bar{w}}\right) + |z_0|^2 = r^2$$

$$\frac{1}{w\bar{w}} - \left(\frac{z_0}{\bar{w}} + \frac{\bar{z}_0}{w}\right) + |z_0|^2 = r^2$$

$$1 \underbrace{- (z_0 w + \bar{z}_0\bar{w})} + \underbrace{(|z_0|^2 - r^2)} w\bar{w} = 0$$

Se $|z_0|^2 - r^2 = 0$ si ottiene l'eq. di una retta, se $|z_0|^2 - r^2 \neq 0$, si ha di nuovo l'eq. di una circonf.

In generale, l'inversione trasf. rette e circonf. in rette o circonf. Di conseguenza, tutte le trasf. di Möbius trasf. rette e circonf.

in rette o circonf.

Sia $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, poniamo

$$\varphi_M(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

Osserviamo che:

$$\boxed{\varphi_{\underline{N}} \circ \varphi_M = \varphi_{\underline{NM}}}$$

Ora se $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\varphi_I(z) = z$$

Quindi

$$\varphi_M^{-1} = \varphi_{M^{-1}}$$

<u>NB</u>: $\varphi_M(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ è def su

su $\mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ se $c \neq 0$.

Def Siano $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ distinti poniamo

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] = \frac{(z_1 - z_4)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z_4)} \quad \text{(birapporto)}$$

Prop. Sia φ_M una trasf. di Möbius $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ Presi $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C} \setminus \{-d/c\}$ e posti

$$w_i = \varphi_M(z_i)$$

Risulta

$$[w_1, w_2, w_3, w_4] = [z_1, z_2, z_3, z_4]$$

Dim. È sufficiente dimostrarlo per trasf. lineari e per l'inversione! $\square$

Corollario Presi $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ distinti e $w_1, w_2, w_3 \in \mathbb{C}$ distinti c'è esattamente una trasf. di Möbius φ:

$$\varphi(z_i) = w_i \qquad i = 1, 2, 3.$$

<u>Dim.</u> Sia φ tale trasf. di Möbius e sia $w = \varphi(z)$.

$$[w_1, w_2, w_3, w] = [z_1, z_2, z_3, z]$$

$$\boxed{\underbrace{\frac{(w_1 - w)(w_3 - w_2)}{(w_1 - w_2)(w_3 - w)}}_{\text{trasf lin fratte in } w} = \underbrace{\frac{(z_1 - z)(z_3 - z_2)}{(z_1 - z_2)(z_3 - z)}}_{\text{trasf lin fratta in } z}}$$

$$\varphi_A(w) = \varphi_B(z)$$

$$w = \varphi_{A^{-1}B}(z)$$

$$\varphi(z) = \underline{\varphi_{A^{-1}B}}(z). \qquad \square$$

Oss.: Una trasf. di Möbius φ trasforma $\mathbb{R}$ in sé sse

$$\varphi(z) = \frac{az+b}{cz+d} \quad , \text{con}$$

$$a, b, c, d \in \mathbb{R} \quad .$$