Abbiamo osservato che se

$$f = \frac{az+b}{cz+d}$$

è t.c. $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ allora f trasf. $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$

Se $\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} > 0$ allora f trasf. il semipiano sup. in se: infatti è suff. verif. che

$$\operatorname{Im}(f(i)) > 0$$

$$f(i) = \frac{ai+b}{ci+d} = \frac{(ai+b)(-ci+d)}{(ci+d)(-ci+d)} =$$

$$= \frac{ac + iad - ibc + bd}{c^2+d^2} = \frac{(ac+bd)+i(ad-bc)}{c^2+d^2}$$

$$\operatorname{Im} f(i) = \frac{\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}}{c^2+d^2} > 0 .$$

Allora, se $a,b,c,d \in \mathbb{R}$ e $ad-bc>0$

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$ è un autom

del semipiano sup.

Lemma $f : \{\operatorname{Im} z > 0\} \to \{\operatorname{Im} z > 0\}$ è un automorfismo sse

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}$$

con $a,b,c,d \in \mathbb{R}$, $ad - bc > 0$.

Dim. Sia $\varphi(z) = \dfrac{z-i}{z+i}$ $\qquad \varphi(i) = 0$

$$\varphi : \{\operatorname{Im} z > 0\} \to B_1(0)$$

Infatti: se $z \in \mathbb{R}$, $z = x$

$$\varphi(x) = \frac{x-i}{x+i} = \frac{(x-i)^2}{(x+i)(x-i)} =$$

$$= \frac{x^2 - 1 - 2ix}{x^2+1} = \underbrace{\frac{x^2-1}{x^2+1}}_{u} - i\underbrace{\frac{2x}{x^2+1}}_{v}$$

$u = 2$

$$u^2+v^2 = \frac{(x^2-1)^2+4x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x^4+2x^2+1}{x^4+2x^2+1} = 1$$

Per continuità φ trasporta il semipiano sup. aperto nel disco unitario aperto.

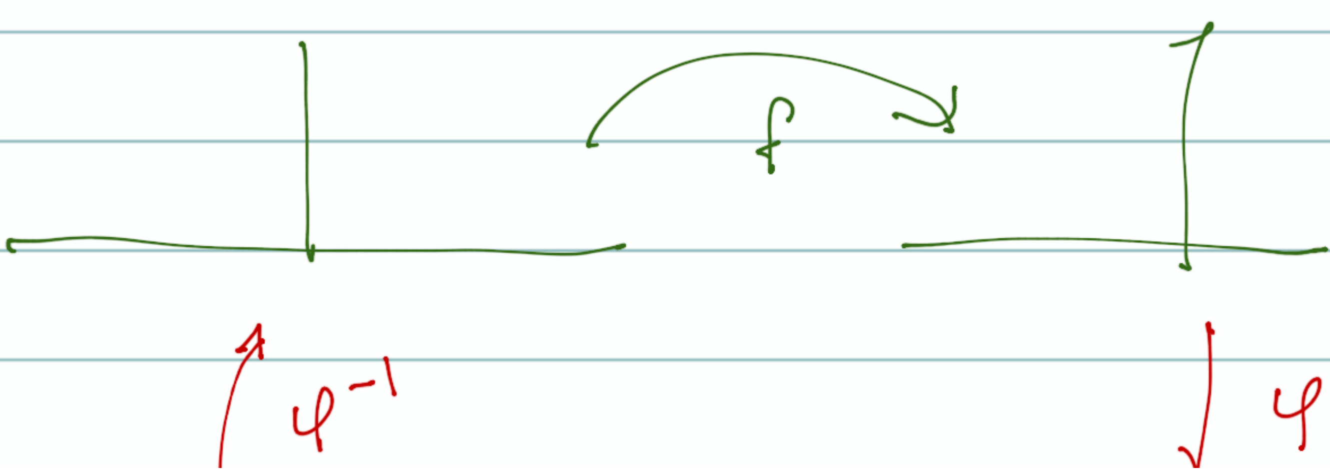
$$\varphi(z) = \frac{z-i}{z+i}, \quad \varphi^{-1}(z) = \frac{z+1}{iz-i}$$

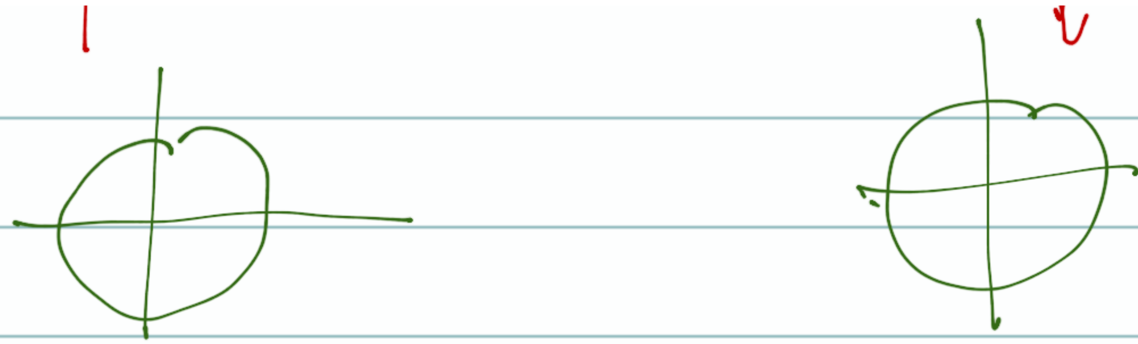
$$\boxed{M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad M^{-1} = \frac{1}{\det M}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 1 & +i \end{pmatrix}$$

$$\varphi^{-1}(z) = \frac{iz+i}{-z+1} = \frac{i(z+1)}{i(iz-i)} = \frac{z+1}{iz-i}$$

Sia f automorf. del semipiano.





$\psi = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$ è un automorfismo del disco.

$$\psi(z) = e^{i\vartheta} \frac{z - c}{1 - \bar{c} z} \qquad |c| < 1, \ \vartheta \in \mathbb{R}.$$

una trasf. di Möbius.

$$\psi = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$$

$$\underbrace{\varphi^{-1} \circ \psi \circ \varphi}_{\text{trasf. di Möbius}} = f$$

Quindi f è di Möbius $\Rightarrow$

$$f(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - cb > 0. \qquad \square$$

Teor. della mappa di Riemann

Sia Ω aperto sempl. connesso $\Omega \subsetneq \mathbb{C}$ allora esiste

$$f : B_1(0) \to \Omega \quad \text{mappa conforme}$$

da $B_1(0)$ su Ω.

Presa $\varphi \in C^0(\partial\Omega)$:

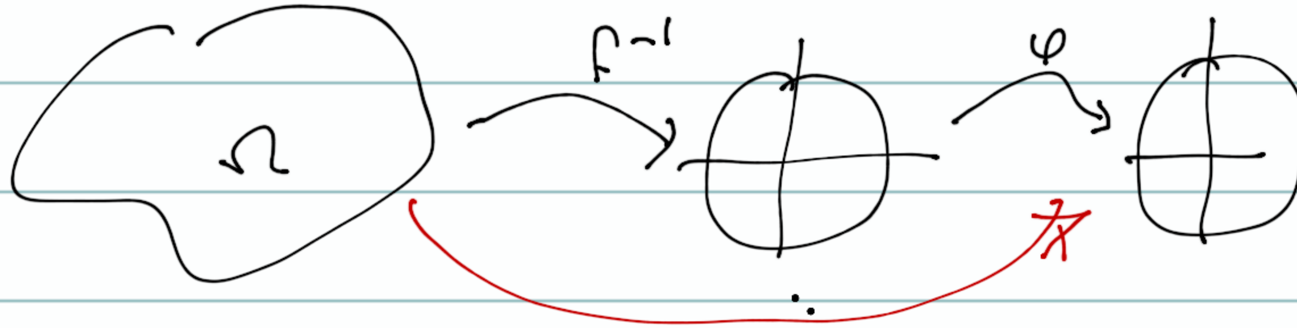
Trovare $u \in \underline{C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})}$ t.c.

$u|_{\partial\Omega} = \varphi$ e u realizzi il minimo dell'integrale

$$J(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

Osgood : prima dim. completa del Teor.

~ 1900



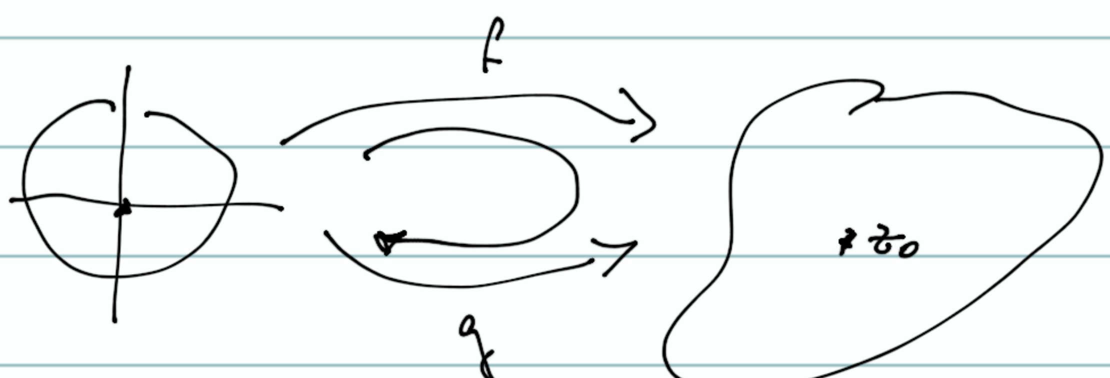
Corollario Fissato $z_0 \in \Omega$ esiste un'unica mappa conforme $f : B_1(0) \to \Omega$ t.c.

$$f(0) = z_0 \quad (2 \text{ parametri})$$

$$f'(0) \in \mathbb{R}^+ = \{ z = x + i0 \mid x > 0 \}.$$

In alternativa: [$f'(0) = re^{i\tau}$ $\quad r>0$, τ fissato.]

Dim. Siano $f, g : B_1(0) \to \Omega$ due mappe conformi t.c. $f(0) = g(0) = z_0$.



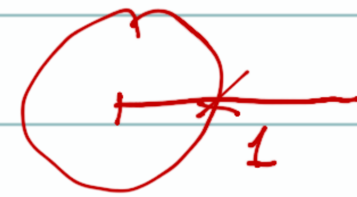
$$\varphi = g^{-1} \circ f : B_1(0) \to B_1(0)$$

è un automorf. del disco t.c. $\varphi(0)=0$

esiste $\vartheta \in \mathbb{R}$ t.c.

$$\varphi(z)=e^{i\vartheta}z$$

$$\varphi'(0)=e^{i\vartheta} \longleftarrow$$



$\varphi = g^{-1}\circ f$

$$\varphi'(0)=\frac{1}{g'(0)}\,f'(0)\left[=\frac{e^{i\tau}r}{e^{i\tau}\rho}=\frac{r}{\rho}\right]$$

Se $g'(0)$ e $f'(0) \in \mathbb{R}^+$ anche

$$\varphi'(0) \in \mathbb{R}^+ \implies \varphi'(0)=1 \quad !$$

$$e^{i\vartheta}=1 \implies \varphi(z)\equiv z$$

$$g=f \qquad \square$$

<u>Corollario</u> Ogni aperto sempl. connesso $\Omega\subset\mathbb{C}$ è omeomorfo a $B_1(0)$ (a $\mathbb{C}$).

<u>Dim.</u> Se $\Omega\neq\mathbb{C}$ <u>un</u> omeomorf. è dato

è dato dalla mappa di Riemann. Se

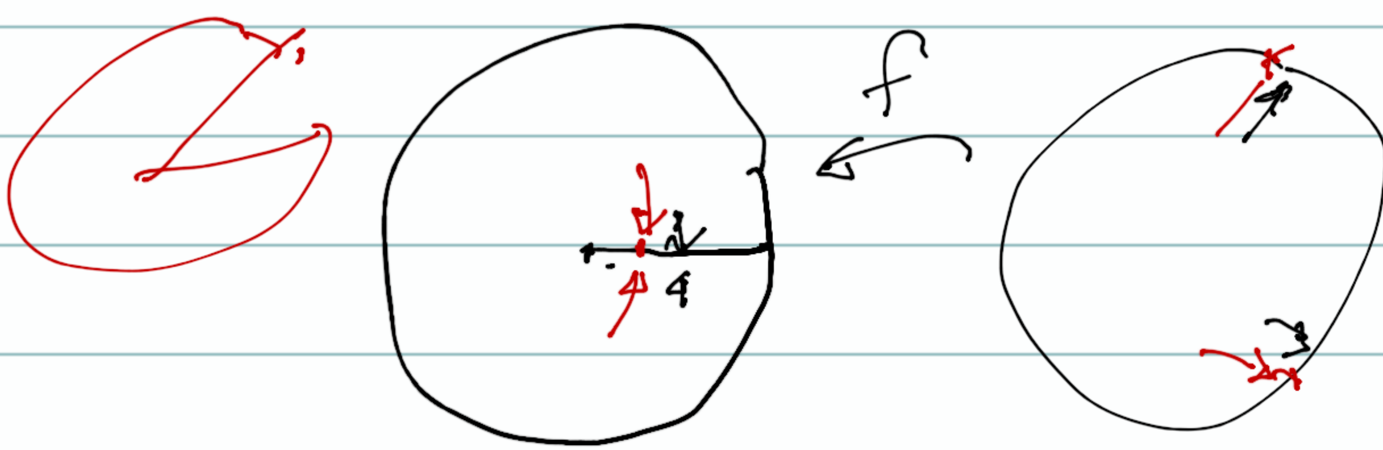
$\Omega = \mathbb{C}$ possiamo prendere

$$\varphi(z) = \frac{z}{1+|z|} : \mathbb{C} \to B_1(0)$$

$$z = re^{i\vartheta}, \quad \varphi(z) = \frac{r}{1+r} e^{i\vartheta} \qquad 0 < r < \infty$$

$$\frac{r}{1+r} \in (0,1)$$

φ applicaz. invertibile <u>cont.</u> con φ^{-1} <u>continua</u>.



<u>Def.</u> Un aperto $\Omega \subset \mathbb{C}$ si dice di Jordan se $\partial\Omega$ è una curva chiusa semplice

Teorema di Jordan. Sia γ curva chiusa semplice in $\mathbb{C}$. $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$ è composto esattamente da due comp. connesse una limitata ("l'interno" di γ) e una illimitata.

(e semplic. connessa)

Veblen

Teor. di Caratheodory.
Sia Ω aperto di Jordan allora presa la mappa di Riemann $f: B_1(0) \to \Omega$, f si estende con continuità fin sul bordo e vale

$$f: \overline{B_1(0)} \to \overline{\Omega}$$
$$f^{-1}: \overline{\Omega} \to \overline{B_1(0)}$$

sono continue