

FUNZIONE D'ONDA & SPAZIO DI HILBERT

MQ 12

ci restituiscono a
problemi UNIDIM.
più semplici

Dualità onde-corpuscoli suggerisce di associare una funz. d'onda a valori complessi $\psi(\vec{x})$ che dia info sulle distrib. di probab. nello spazio.

Lo stato della particella è descritto in termini delle funz. d'onda

Qual'info si ottiene da ψ su stato part.?

Intensità onde
& probab.

Innanzitutto, la prob. che particella si trovi in intervallo Δ è data

$$K \int_{\Delta} dx |\psi(x)|^2, \quad K \text{ f.c.} \quad K \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x)|^2 = 1, \quad (*)$$

$$\text{cioè } K^{-1} = \|\psi\|^2 \equiv \int_{\mathbb{R}} dx |\psi(x)|^2$$

- Affinché abbia senso (*), dobbiamo assumere che la funz. d'onda sia "modulo quadrato sommabile" (secondo Lebesgue) su \mathbb{R} , cioè $\psi \in L^2$

- $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ danno stessa distrib. statistica della variabile dinamica x .

Se vogliamo che ψ descriva completamente lo stato del sistema, dobbiamo richiedere che fornisce distrib. anche di altre variabili dinamiche.

(In pts. mod. ridemmo ambiguità nell'osservare una funz. d'onda allo stato del sist.)

- Essendo $\psi(x) \in L^2$, possiamo esprimere per mezzo della trasformata di Fourier

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int dk e^{ikx} \hat{\psi}(k)$$

si può pensare rappresenti, a t fisso, un'onda piana monocromatica che trasporta impulso $p = \hbar k$

$$\psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp e^{ipx/\hbar} \tilde{\psi}(p) \quad \tilde{\psi}(p) = \frac{1}{\sqrt{\hbar}} \hat{\psi}(p/\hbar)$$

↑ chiameremo $\tilde{\psi}(p)$ la trasformata di Fourier

↓
sovrapposizione di onde e impulsi di vari $\tilde{\psi}(p)$

$$1 = \int_{\mathbb{R}} |\psi(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |\tilde{\psi}(p)|^2 dp$$

↑
prob. densità di $\psi(x)$ per le particelle in x
↑
probability of finding particles at x

↓
This can be interpreted as prob. density of finding particles with momentum p .

- Data la biunivocità della trasformata di Fourier, è equivalente conoscere $\psi(x)$ o $\tilde{\psi}(p)$.
- $\tilde{\psi}(p)$ è funz. d'onda in rappresentazione P .
- Risolto ambiguità: $\psi(x)$ e $e^{i\alpha(x)}\psi(x)$ hanno trasf. di Fourier diverse e quindi distribuz. di P diverse.
- Rimanangono due tipi di ambiguità:



Per rappresentare stato di una particella, fun. d'onda deve essere L^2 .
 Inoltre vogliamo che valga il principio di sovrapp. (interferenza) (fun. d'onda Young)
 cioè combinat. lineari di funzioni d'onda e ancora una fun. d'onda
 L^2 soddisfa pta proprietà \rightarrow è uno spazio vettoriale \mathbb{C} .

Classi di equiv. (insiemi di f.d.o. che rappresentano stesso stato):

fun. L^2 ugual e uno di insieme di mis. nulla e
 (di una cost. moltiplicativa).

SPAZIO VETTORIALE
 a dim. INFINITA

L^2 è in realtà uno SPAZIO DI HILBERT, cioè
 ammette uno prodotto scalare hermitiano

$$\langle \psi, \phi \rangle = \int dx \psi^*(x) \phi(x) = \langle \phi, \psi \rangle^*$$

che consente di def. la norma

$$\|\psi\|^2 = \langle \psi, \psi \rangle = \int dx |\psi(x)|^2$$

Stato $\leftrightarrow \hat{\Psi} = \{ \alpha \psi \mid \alpha \in \mathbb{C} \setminus \{0\} \}$

$$\psi \in L^2 \leftrightarrow \tilde{\psi} \in L^2$$

Trasf. Fourier è transf. biuniv. tra L^2_x e L^2_p
 \Rightarrow equiv. rapp. stat. del sist. con $\psi(x)$ o $\tilde{\psi}(p)$

PACCHETTO D'ONDA GAUSSIANO

1-dim. / free particle

15.1

A $t=0$

$$\psi(x,0) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2} (2\pi)^{3/4}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2} (p-p_0)^2} e^{ipx/\hbar} dp$$

$$\tilde{\psi}(p) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{1/4}} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2} (p-p_0)^2} \leftarrow \text{Gaussiana centrata su } p_0$$

Avremo bisogno di risultato di integrale

$$I(\alpha, \beta) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-\alpha^2 (\frac{x}{\alpha} + \beta)^2} = I(\alpha, 0) = \frac{1}{\alpha} I(1, 0)$$

$$I(1, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx e^{-x^2} = \pi^{1/2}$$

Possiamo allora calcolare

$$\psi(x,0) = \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2} (2\pi)^{3/4}} e^{ip_0 x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2} (p-p_0)^2} e^{i(p-p_0)x/\hbar} dp$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2} (2\pi)^{3/4}} e^{ip_0 x/\hbar} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2} \left[(p-p_0)^2 - i(p-p_0)\frac{2\hbar x}{a^2} - \frac{4\hbar^2 x^2}{a^4} \right] - \frac{4x^2}{a^2}} dp$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2} (2\pi)^{3/4}} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-x^2/a^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2} (p')^2} dp' \quad \alpha = \frac{a}{2\hbar}$$

$$= \frac{a^{1/2}}{\hbar^{1/2} (2\pi)^{1/4} 2^{1/2} \pi^{1/2}} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-x^2/a^2} \frac{2\hbar \pi^{1/2}}{a} = \frac{(2\hbar)^{1/2}}{(2\pi)^{1/4} a^{1/2}} e^{-x^2/a^2} e^{ip_0 x/\hbar}$$

$$= \left(\frac{2\hbar}{\pi a^2} \right)^{1/4} e^{ip_0 x/\hbar} e^{-x^2/a^2}$$

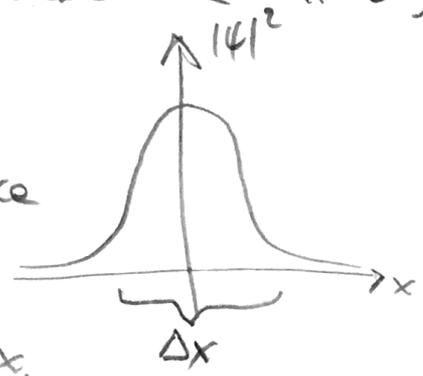
Al temp $t=0$ la densità di probabilità delle particelle è

$$\frac{|\psi(x,0)|^2}{\|\psi\|^2} = \frac{\sqrt{\frac{2k}{\pi a^2}} e^{-2x^2/a^2}}{\frac{1}{\|\psi\|^2}} = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} e^{-2x^2/a^2}$$

ovvero $\|\psi\|^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\frac{2k}{\pi a^2}} e^{-2x^2/a^2} dx = \sqrt{\frac{2k}{\pi a^2}} \frac{\pi^{1/2} a}{\sqrt{2}} = k^{1/2}$

Centro del pacchetto d'onde è a $x=0$, dove la densità di probab. è max

Gaussiana e simmetrica quindi $x=0$ è anche VALOR MEDIO di x .



$$\langle x \rangle_{\psi} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \underbrace{|\psi(x)|^2}_{P(x)} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-2x^2/a^2} dx = 0!$$

dispari per $x \rightarrow -x$

Δx è larghezza della Gaussiana (se $f(x) = e^{-x^2/b^2}$, $\Delta x = \frac{b}{\sqrt{2}}$)
In generale è def. come
ovvero $\Delta x = a/2$

$$\Delta x^2 = \langle x^2 \rangle_{\psi} - \langle x \rangle_{\psi}^2$$
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx = \sqrt{\frac{2}{\pi a^2}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-2x^2/a^2} dx = \frac{a^2}{4} \quad (\text{vedi dentro})$$

Possiamo fare stessi conti per la distrib. delle p date da $\Psi(p)$

$$\langle P \rangle_{\psi} = P_0, \quad \Delta P^2 = \langle p^2 \rangle_{\psi} - \langle P \rangle_{\psi}^2 = \frac{k^2}{a^2} + P_0^2 - P_0^2 = \frac{k^2}{a^2}$$

$$\Delta x \cdot \Delta p = \frac{a}{2} \cdot \frac{k}{a} = \frac{k}{2}$$

In effetti p_0 è il valore minimo di $\Delta x \cdot \Delta p$ / Provare a restringere Δp / ma Δx aumenta

Misuriamo posizione in Δx a temp $t=0$, quindi otteniamo stat det da ψ corrispondente. Se cerchiamo di migliorare precisione sulla x , otteniamo nuovo ψ con nuova precisione incertezza Δp sulla p !

$$E_p = \frac{p^2}{2m}$$

Evolutione temporale:

$$\psi(x,t) = \frac{a^{1/2}}{(2\pi)^{3/4} \hbar^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a^2}{4\hbar^2}(p-p_0)^2} e^{i(px - E_p t)/\hbar} dp$$

Al temp t il pacchetto rimane Gaussiano. Facciamo conti come prima

$$\psi(x,t) = \frac{1}{\hbar^{1/2}} \left(\frac{2a^2}{\pi} \right)^{1/4} \frac{e^{i\varphi}}{\left(a^4 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2} \right)^{1/4}} e^{i p_0 x / \hbar} e^{-\left(x - \frac{\hbar p_0}{m} t \right)^2 / \left(a^2 + \frac{2\hbar^2 t}{m} \right)}$$

- $|\psi|^2$ rimane cost. nel temp, ma $\langle x \rangle$ cambia.
- $|\psi(x,t)|^2$ è ancora Gaussiano, ma ampiezza $\Delta x(t)$ aumenta nel temp. $\Delta x(t) = \frac{a}{2} \sqrt{1 + \frac{4\hbar^2 t^2}{m^2 a^4}}$
- $|\tilde{\psi}|^2$ rimane cost. $\langle p \rangle$ rimane cost.
- Se gruppo di particelle densità perous con velocità cent. Δv , a temp t : $\Delta x_c = \Delta v |t| = \frac{\hbar |t|}{m a}$

Gli STATI di un sistema (noi abbiamo visto finora l'esempio il sist. di una particella) quantistico sono descritti da VETTORI in uno SPAZIO DI HILBERT.

Di solito indichiamo vett. con simbolo \vec{v} . In MQ si usa notaz. di Dirac e si denota il vett. col simbolo $|\psi\rangle$.
KET

Consideriamo sist. che si ^{può} trovare sol. in "2 STATI" (tip. polarizz. fotone) indip. $|+\rangle$ e $|-\rangle$ (sist. viene detto QUBIT)

Qto tip. di sist. ha una sola proprietà (E. POLARIZZAZIONE) e la sua miscela può dare sol. 2 valori risultat. possibili

Dopo misura se ho +, sist. è in stato $|+\rangle$, $|-\rangle$ altrimenti

Il sist. può trovarsi inizialmente in una qualsiasi sovrappos. $|\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle$ $a_+, a_- \in \mathbb{C}$

Quando misuriamo $\text{Prob}(\pm) = |a_{\pm}|^2$ $\text{Prob}(+) + \text{Prob}(-) = 1$
 $\Rightarrow |a_+|^2 + |a_-|^2 = 1$

Dopo misura se troviamo +, sappiamo che in misura successiva $\text{Prob}(+) = 1 \Rightarrow a_+^{\text{alk}} = 1$ $a_-^{\text{alk}} = 0$. (MISURA CAMBIA STATO DEL SISTEMA)

- Dopo misura sist. si può trovare o in stato $|+\rangle$ o in stato $|-\rangle$
 $\rightarrow \{|+\rangle, |-\rangle\}$ insieme ESAUSTIVO di stati.
- Dopo misura, se ho ottenuto ris. +, stato è $|+\rangle$; se ripeto misura ho prob. nulla di trovare valore $\neq +$ (cioè -)
 $\rightarrow \{|+\rangle, |+\rangle\}$ insieme ESCLUSIVO di stati.

Applichiamo a probl. di ~~due particelle~~

$$|\psi_1\rangle = a_{1+}|+\rangle + a_{1-}|-\rangle$$

$$|\psi_2\rangle = a_{2+}|+\rangle + a_{2-}|-\rangle$$

$$|\phi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\psi_1\rangle + |\psi_2\rangle) = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1+} + a_{2+})|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}(a_{1-} + a_{2-})|-\rangle$$

$$Prob_1(\pm) = |a_{1\pm}|^2$$

$$Prob_2(\pm) = |a_{2\pm}|^2$$

per stati che e' sovrapp. dei due

$$\begin{aligned}
 Prob(\pm) &= \frac{1}{2} |a_{1\pm} + a_{2\pm}|^2 = \\
 &= \frac{1}{2} |a_{1\pm}|^2 + \frac{1}{2} |a_{2\pm}|^2 + \frac{1}{2} (a_{1\pm} a_{2\pm}^* + a_{1\pm}^* a_{2\pm}) \\
 &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\frac{1}{2} (Prob_1(\pm) + Prob_2(\pm))} \quad \uparrow \text{termine di interferenza}
 \end{aligned}$$

Es:

$|+\rangle$ particelle rilevate in uerta superiore di schermo

$|-\rangle$ " " inferiore "

$|\psi_1\rangle$ miscela che porta attraverso fenditura 1

$|\psi_2\rangle$ " " " " 2

$|\phi\rangle$ sovrapp. dei due.

Se misuriamo alla fenditura, sappiamo che coliamo a $|\psi_1\rangle$ o $|\psi_2\rangle$, quindi misure ripetute hanno distrib. del da $\frac{1}{2}(Prob_1(\pm) + Prob_2(\pm))$.

Stati sono vett. in sp. di HILBERT \mathcal{H} . Esso è sp. dotat d. prodotto scalare.

Sp. vett. \mathcal{H} ha un suo duale $\mathcal{H}^* = \{ \text{sp. vett. dei funz. bilineari lin su } \mathcal{H} \}$
 indichiamo suoi elem. con simbolo $\langle \varphi | \in \mathcal{H}^*$
 BRA

$$\langle \varphi | : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

$$|\psi\rangle \mapsto \langle \varphi | \psi \rangle \in \mathbb{C}$$

Prodotto scalare $\langle, \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$, definisce un
 ISOMORFISMO $\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}^*$

$|\psi\rangle^\dagger \equiv \langle \psi |$ è quel funz. che spara nel modo seguente

$$|\psi\rangle^\dagger : |\chi\rangle \mapsto \langle \psi | \chi \rangle = \langle |\psi\rangle, |\chi\rangle \rangle \in \mathbb{C}$$

o detto altrimenti $\langle \psi | = \langle |\psi\rangle, \cdot \rangle$

In pto modo prodotto scalare $\langle |\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle \rangle$ è sempre indicato
 con $\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle$

verrà.

$$\cdot \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle \in \mathbb{C}$$

$$\cdot \langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = (|\psi_1\rangle, |\psi_2\rangle) \stackrel{\text{verrà.}}{=} (|\psi_2\rangle, |\psi_1\rangle)^* = \langle \psi_2 | \psi_1 \rangle^*$$

$$\cdot \langle \psi_1 | \psi_1 \rangle = (|\psi_1\rangle, |\psi_1\rangle) = \|\psi_1\|^2 > 0$$

$$\cdot \langle \psi | (a|\psi_1\rangle + b|\psi_2\rangle) = a \langle \psi | \psi_1 \rangle + b \langle \psi | \psi_2 \rangle$$

hai l'u. in secondo
 (antile in primo)

Sp. vett. ammette una BASE.

In sist. qubit $|+\rangle, |-\rangle$ mi fornisce una base (ogni vettore di \mathcal{H} è sovrapp. lin. di elem. delle base)
o.h.

$$\text{allora } |\psi\rangle = a_+ |+\rangle + a_- |-\rangle$$

$$\text{e } \text{Prob}(\pm) = |a_{\pm}|^2 = |\langle \pm | \psi \rangle|^2$$

$$1 = |a_+|^2 + |a_-|^2 \iff \langle \psi | \psi \rangle = 1$$

$|\langle \phi | \psi \rangle|^2 = \text{Prob}$ che un sist. nello stato $|\psi\rangle$ dia come risult. di misura p_ϕ associat. a $|\phi\rangle$.

Si come $a_{\pm} = \langle \pm | \psi \rangle$ possiamo scrivere

$$|\psi\rangle = \langle + | \psi \rangle |+\rangle + \langle - | \psi \rangle |-\rangle =$$

$$= (|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -|) |\psi\rangle$$

op. lineare
 $\Downarrow \forall |\psi\rangle$

$$|+\rangle \langle +| + |-\rangle \langle -| = \mathbb{1}$$

RELAZIONE DI COMPLETEZZA

Nel caso i risultat. della misura siano discreti (e infiniti) ho un $\{|\lambda_i\rangle\}$ autovet. con λ_i possibili risultat. di misura
 $\{|\lambda_i\rangle\}$ BASE $\langle \lambda_i | \lambda_j \rangle = \delta_{ij}$ $\mathbb{1} = \sum_i |\lambda_i\rangle \langle \lambda_i|$

• $\{|+\rangle, |-\rangle\}$ base \rightsquigarrow insieme ESAUSTIVO

• $|+\rangle, |-\rangle$ o.h. \rightsquigarrow insieme ESCLUSIVO

(prob. (-) in stato $|+\rangle = |\langle - | + \rangle|^2 = 0$).

OSSERVABILI

L'operazione di MISURA presuppone la conoscenza di un insieme ESCLUSIVO ed ESAUSTIVO di STATI associati ai risultati della MISURA.

dopo misura prob. 1 di ritrovare stesso risult.
dopo misura stato ritrova in autostato

Dato una VARIABILE DINAMICA (OSSERVABILE), essa deve essere descritta da un oggetto matematico che include sia i possibili risultati di una misura di tale osservabile, sia gli stati corrispondenti ai singoli risultati (cioè stati che t.c. la misura da il risultato corrispondente con probab. 1).

OPERATORI AUTOAGGIUNTI su \mathcal{H}

cioè $A : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ con $A^\dagger = A$

(In particolare sono HERMITIANI)

• A^\dagger è quell'operatore t.c. il bra corrispondente al ket $A|\psi\rangle$ è $\langle\psi|A^\dagger$ ($\langle\psi|A^\dagger : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$)

• $A^\dagger = A \Rightarrow$ autovalori di A sono REALI

Dim. $\langle a_i | A | a_i \rangle = a_i \cdot \langle a_i | a_i \rangle$

$\langle a_i | A^\dagger | a_i \rangle = \langle a_i | A | a_i \rangle^* = a_i^* \cdot \langle a_i | a_i \rangle //$

• A autooff. $\Rightarrow \exists$ base di autovetton. $|a_i\rangle$ in \mathcal{H} $A|a_i\rangle = a_i|a_i\rangle$ (ESAUSTIVI)
(se due ^{opier} autovetton. $|a_i\rangle$ corrispondono allo stesso autovalore, si dice che l'autovalore è DEGENERE)

• Se $a_i \neq a_j$ $\langle a_i | a_j \rangle = 0$ (risultati ESCLUSIVI)

Dim. $(a_i - a_j) \langle a_i | a_j \rangle = a_i \langle a_i | a_j \rangle - a_j \langle a_i | a_j \rangle =$
 $= \langle a_i | A | a_j \rangle - \langle a_i | A | a_j \rangle = 0 //$

- Probabilità di misurare valore a :

$$|\psi\rangle = \sum_i c_i |a_i\rangle \rightarrow \text{Prob}(a) = \sum_{\substack{i \text{ t.c.} \\ a_i = a}} |c_i|^2$$

Se autovettore a non è degen., allora esiste un solo autovettore corrisp. e $\text{Prob}(a) = |c_i|^2$ ($a_i = a$).

~~risultato~~

Dato una base $\{|e_i\rangle\}$ in \mathcal{H} (non necessariamente di autovett.)
 posso associare una matrice ed A :

$$A|e_i\rangle = \sum_j A_{ji} |e_j\rangle \quad \langle e_j | A | e_i \rangle = A_{ji}$$

Dato espansione del vett. $|\psi\rangle = \sum_i c_i |e_i\rangle$

$$A|\psi\rangle = A \sum_i c_i |e_i\rangle = \sum_j c_i A_{ji} |e_j\rangle$$

cioè le componenti di $A|\psi\rangle$ sono $\sum_i A_{ji} c_i$.

$$\text{Se } |e_i\rangle = |q_i\rangle \Rightarrow A_{ij} = \delta_{ij} a_i$$

ESEMPIO. Prendiamo sistema QUBIT, cioè sist. con \mathcal{H} 2-dim.

~~$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$~~ ~~base autovett. di~~

$$\text{Sia dato osservabile } \Sigma \text{ con } \Sigma_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- Si trovano autovettri: $\det(\lambda - \Sigma) = \lambda^2 - 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1$

- Si trovano autovett.: $\text{Ker}(\Sigma - 1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \Leftrightarrow \lambda = 1$

$$\text{Ker}(\Sigma + 1) = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \rangle \Leftrightarrow \lambda = -1$$

cioè $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ NORMALIZZATO \leadsto BASE $\{|q_i\rangle\} = \{|+\rangle, |-\rangle\}$
 $\langle + | - \rangle = 0$

- Se sist. si trova nello stato $|\psi\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, qual è prob. di una misura di Σ che risulti +1?

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} |+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} |-\rangle \Rightarrow \text{Prob}(+1) = |\langle + | \psi \rangle|^2 = \frac{1}{2}$$

Calcoliamo il valor medio di A in misure ripetute di A nel sistema (sempre) nello stato $|\psi\rangle$

$$\begin{aligned} \langle A \rangle_\psi &= \sum_i a_i \text{Prob}(a_i) = \sum_i a_i |\langle a_i | \psi \rangle|^2 = \\ &= \sum_i \langle \psi | a_i \rangle a_i \langle a_i | \psi \rangle = \sum_i \langle \psi | A | a_i \rangle \langle a_i | \psi \rangle = \\ &= \langle \psi | A \underbrace{\sum_i |a_i\rangle \langle a_i|}_{\text{operatore} = \mathbb{1}} | \psi \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \end{aligned}$$

($\langle \psi | \psi \rangle = 1$)

(che è autovet. valore base di \mathcal{H})

Per VARIANZA (nota una volta che so come calcolare i valori medi)

$$\begin{aligned} \Delta A^2 &= \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = \langle \psi | A^2 | \psi \rangle - \langle \psi | A | \psi \rangle^2 = \\ &= \langle \psi | A^2 - \langle A \rangle^2 | \psi \rangle = \langle \psi | (A - \langle A \rangle)^2 | \psi \rangle \end{aligned}$$

Valor medio da risultato "classico". Ci aspettiamo che sia deterministico, una volta che sappiamo come evolve lo stato del sistema $|\psi\rangle_t$

$$\langle A \rangle(t) = \langle \psi | A | \psi \rangle_t$$

ES. Prendiamo sist. precedenti $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|+\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|-\rangle$

- Calcola $\langle \Sigma \rangle$ e $\Delta \Sigma$

$$\begin{aligned} \langle \Sigma \rangle &= \langle \psi | \Sigma | \psi \rangle = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \langle + | + \frac{1}{\sqrt{2}} \langle - | \right) \Sigma \left(\frac{1}{\sqrt{2}} | + \rangle + \frac{1}{\sqrt{2}} | - \rangle \right) = \\ &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0 \end{aligned}$$

$$\langle \Sigma^2 \rangle = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$\Delta \Sigma = \sqrt{\langle \Sigma^2 \rangle - \langle \Sigma \rangle^2} = 1$$

Prendiamo operatore \hat{X} a spettro continuo che sia autoaggiunto. \rightarrow base di autovettori $|x\rangle$ tr.

$$\hat{X}|x\rangle = x|x\rangle \quad \langle x|\hat{X} = x\langle x|$$

$$\mathbb{1} = \sum_x |x\rangle\langle x| = \int dx |x\rangle\langle x| \quad \int \delta(x) f(x) = f(0)$$

$$\langle x_1|x_2\rangle = \delta(x_1-x_2)$$

La funzione d'onda in rappres x associata al ket $|\psi\rangle$ e' def. dalla rel. $\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$ perche' prob. di misurare x e' $|\langle x|\psi\rangle|^2$

$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle$

In fatti

$$\langle \psi|\psi\rangle = \int dx \langle \psi|x\rangle \langle x|\psi\rangle = \int dx \langle x|\psi\rangle^* \langle x|\psi\rangle = \int dx \psi^*(x) \psi(x)$$

come precedentem.

~~$\psi(x) = \sum_k c_k \psi_k(x)$~~
 ~~$\psi(x) = \int dx_0 \psi(x_0) \delta(x-x_0)$~~

$$\psi(x) = \int dx_0 \underbrace{\psi(x_0)}_{c_k} \underbrace{\delta(x-x_0)}_{|x_0\rangle}$$

$$\langle x|\hat{X}|\psi\rangle = x \langle x|\psi\rangle$$

\uparrow
coeff.

cioe' $\hat{X}\psi(x) = x\psi(x)$

Completezza

$$\int d\hat{x} |\hat{x}\rangle \langle \hat{x}| = \mathbb{1}$$

Verifichiamo compl. facend sandwich $\langle x| \dots |\psi\rangle$

$$\langle x| \int d\hat{x} |\hat{x}\rangle \langle \hat{x}| \psi \rangle = \int d\hat{x} \delta(x-\hat{x}) \psi(\hat{x}) = \psi(x) = \langle x|\psi\rangle$$

$$\hat{p} \quad \hat{p}|p\rangle = p|p\rangle$$

$$\tilde{\Psi}(p) = \langle p|\psi\rangle \quad \text{con} \quad \frac{|\tilde{\Psi}(p)|^2}{\|\psi\|^2} \text{ dens. prob. di impulso.}$$

$$\int dp |p\rangle \langle p| = 1 \quad \langle p|p'\rangle = \delta(p-p')$$

"matrice" del
cambiamento
di base

$$\langle x|\psi\rangle = \langle x|\int dp |p\rangle \langle p|\psi\rangle = \int dp \tilde{\Psi}(p) \langle x|p\rangle$$

$$\Psi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} \int dp \tilde{\Psi}(p) e^{ipx/\hbar}$$

L'identificazione di $\tilde{\Psi}$ con la transf. di Fourier di Ψ

$$\text{mi da} \quad \langle x|p\rangle = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}} e^{ipx/\hbar}$$

Vediamo come \hat{p} agisca in rappresent. $|x\rangle$

$$\begin{aligned} \langle x|\hat{p}|\psi\rangle &= \int dp \langle x|p\rangle \langle p|\hat{p}|\psi\rangle = \int dp p \langle x|p\rangle \langle p|\psi\rangle = \\ &= \int dp p \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) = \frac{\hbar}{i} \frac{d}{dx} \langle x|\psi\rangle \end{aligned}$$

Consideriamo operatore $e^{-ia\hat{p}/\hbar}$

$$\langle x|e^{-ia\hat{p}/\hbar}|\psi\rangle = \int dp e^{-iap/\hbar} \frac{e^{ipx/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) =$$

$$= \int dp \frac{e^{ip(x-a)/\hbar}}{\sqrt{2\pi\hbar}} \tilde{\Psi}(p) = \langle x-a|\psi\rangle = \Psi(x-a)$$

\hat{p}
→ OPERATORE che genera le traslazioni.