(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ x_1 + x_3 \\ 3x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\mathrm{Im} f$ e una sua base.

$\dim \mathrm{Im} f = \mathrm{rg}\, A = 2$, $\quad \mathrm{Im} f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\right)$

$\dim \ker f = 3 - \dim \mathrm{Im} f = 3 - 2 = 1$, $\quad \ker f = \left\{ \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} : -2x_2 = 0,\ x_1 + x_3 = 0 \right\}$

$\Rightarrow \ker f = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right)$

(c) Si dica, motivando la risposta, se i sottospazi $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$.

Siccome $\mathrm{rg}\begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow$ il vettore $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} \notin \mathrm{Im} f$

$\Rightarrow \mathrm{Im} f \cap \ker f = \left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\} \Rightarrow$ $\mathrm{Im} f$ e $\ker f$ sono in somma diretta.

(d) Si completi la base trovata di $\ker f$ and una base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^3$, e si scriva la matrice $M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f)$.

Ad esempio $\quad \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} \right\}$,

$$f\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix} = -3 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$M^{\mathcal{C}}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(3) Al variare dei parametri reali $a, b \in \mathbb{R}$ si consideri la matrice

$$M_{a,b} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si calcoli il polinomio caratteristico di $M_{a,b}$ e si determini il suo spettro in funzione di a e b.

$$p_{M_{a,b}}(t) = \det\begin{pmatrix} a-t & b \\ 0 & 1-t \end{pmatrix} = (a-t)(1-t)$$

$$Sp(M_{a,b}) = \{a, 1\}$$

(b) Si determinino, giustificando la risposta, i valori di a e b per cui $M_{a,b}$ risulta diagonalizzabile.

Se $\boxed{a \neq 1}$ $\Rightarrow$ ci sono 2 autovalori distinti, ciascuno ha molteplicità 1, e il polinomio $p_{M_{a,b}}(t)$ fattorizza in fattori lineari $\Rightarrow$ $M_{a,b}$ è diagonalizzabile.

Se $\boxed{a = 1}$, c'è solo l'autovalore 1 : $m_a(1) = 2$

$M_{1,b}$ è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ $m_g(1) = 2 = \dim\ker(M_{1,b} - 1 \cdot I_2)$
$= \dim\ker\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{b = 0}$

(c) Per i valori di a e b per cui $M_{a,b}$ risulta diagonalizzabile, si determini una base $\mathcal{B}_{a,b}$ di $\mathbb{R}^2$ formata da autovettori per l'applicazione lineare associata a $M_{a,b}$.

Se $a \neq 1$, $V_a = \ker\begin{pmatrix} 0 & b \\ 0 & 1-a \end{pmatrix} = \{x_2 = 0\} = Span\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

$V_1 = \ker\begin{pmatrix} a-1 & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \{(a-1)x_1 + b x_2 = 0\} = Span\left(\begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}\right)$

$\mathcal{B}_{a,b} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}\right\}$

Se $a = 1$ e $b = 0$, $M_{1,0} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\mathcal{B}_{a,b} = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$

(d) Si scriva la matrice di passaggio (in funzione di a e b) dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ alla base $\mathcal{B}_{a,b}$.

Se $a \neq 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} b \\ 1-a \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{b}{a-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{1-a}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_{a,b}}(Id) = \begin{pmatrix} 1 & b/a-1 \\ 0 & 1/1-a \end{pmatrix}$$

Se $a = 1$ e $b = 0$, $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}_{a,b}} = I_2$

(4) (a) Si determini la posizione reciproca (parallele, incidenti, sghembe) delle due rette r ed s di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = & 1-t \\ y = & 1+t \\ z = & t \end{cases}, \qquad \begin{cases} x = & 1+\tau \\ y = & 1-\tau \\ z = & \tau. \end{cases}$$

Le due rette passano entrambe per il punto $(1,1,0)$ che si ottiene per $t=0$, rispettivamente per $\tau=0$. Quindi sono incidenti. Sono inoltre distinte perché hanno giaciture diverse:

$$W_r = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\right), \quad W_s = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$$

(b) Nel caso che r ed s risultino complanari, si trovino delle equazioni parametriche e un'equazione cartesiana del piano che le contiene.

Eq. parametriche del piano passante per $(1,1,0)$ con giacitura $W = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$:

$$\begin{cases} x_1 = 1 - t + s \\ x_2 = 1 + t - s \\ x_3 = t + s \end{cases}$$

Eq. cartesiana: cons. $\begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-1 \\ 1 & -1 & x_2-1 \\ 1 & 1 & x_3 \end{pmatrix} \xrightarrow[\mathrm{I}^a+\mathrm{III}^a]{\mathrm{I}^a+\mathrm{II}^a}$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-1 \\ 0 & 0 & x_1+x_2-2 \\ 0 & 2 & x_1+x_3-1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}^a \leftrightarrow \mathrm{III}^a} \begin{pmatrix} -1 & 1 & x_1-1 \\ 0 & 2 & x_1+x_3-1 \\ 0 & 0 & x_1+x_2-2 \end{pmatrix} : \boxed{x_1+x_2-2=0}$$