

→ I risultati delle operazioni sono fatti con excel, per questo ci saranno delle discordanze con operazioni fatte con la calcolatrice.

→ I dati a disposizione sono:

X	Y
6	8
9	7
11	7
9	6
13	3
15	4

$$\bar{x} = 10.5; \quad \bar{y} = 5.8\bar{3}; \quad n = 6; \quad \sum x_i = 63; \quad \sum x_i^2 = 713; \quad \sum y_i = 35$$

Le domande sono:

- 1) Calcolare l'equazione della retta di previsione
- 2) Sapendo che $SQ_{TOT} = 18.833$ e che $SQ_{REG} = 13.636$, mostrare come è stato ottenuto SQ_{REG} e calcolare R^2 e r .
- 3) Sapendo che $SQ_{ERR} = 5.197$, applicare il t-test per il coefficiente angolare e prendere una decisione per $\alpha = 0.05$

SVOLGIMENTO:

$$\hat{y} = \alpha + \beta x \rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n & \sum x_i \\ \sum x_i & \sum x_i^2 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum (x_i \cdot y_i) \end{bmatrix} \rightarrow \text{Mi manca } \sum (x_i \cdot y_i)$$

$$\rightarrow \sum (x_i \cdot y_i) = (6 \cdot 8) + (9 \cdot 7) + (11 \cdot 7) + (9 \cdot 6) + (13 \cdot 3) + (15 \cdot 4) = 341$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 63 \\ 63 & 713 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 35 \\ 341 \end{bmatrix}$$

$$\rightarrow \text{DET} = a \cdot d - b \cdot c = 6 \cdot 713 - 63 \cdot 63 = 309$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 6 & 63 \\ 63 & 713 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{713}{309} & -\frac{63}{309} \\ -\frac{63}{309} & \frac{6}{309} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.307 & -0.204 \\ -0.204 & 0.0194 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2.307 & -0.204 \\ -0.204 & 0.0194 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 35 \\ 341 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11.236 \\ -0.515 \end{bmatrix}$$

→ La retta di previsione è $\hat{y} = 11.236 - 0.515x$

$$\rightarrow SQ_{REG} = \sum (\hat{y} - \bar{y})^2 = (\hat{y} - \bar{y})' \cdot (\hat{y} - \bar{y})$$

→ \hat{y} è il valore atteso di y per ognuna delle x che ho fra i dati. Quindi utilizzo la retta trovata al punto 1) per trovare questi valori.

$$\hat{y} = \begin{bmatrix} 8.149 \\ 6.605 \\ 5.576 \\ 6.605 \\ 4.547 \\ 3.518 \end{bmatrix} \quad \bar{y} = \begin{bmatrix} 5.83 \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{bmatrix} \Rightarrow \text{SQ REG} = (\hat{y} - \bar{y})' \cdot (\hat{y} - \bar{y})$$

$$\Rightarrow \text{SQ REG} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 8.149 \\ 6.605 \\ 5.576 \\ 6.605 \\ 4.547 \\ 3.518 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.83 \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{bmatrix} \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 8.149 \\ 6.605 \\ 5.576 \\ 6.605 \\ 4.547 \\ 3.518 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5.83 \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.316 \\ 0.772 \\ -0.257 \\ 0.772 \\ -1.287 \\ -2.316 \end{bmatrix} \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 2.316 \\ 0.772 \\ -0.257 \\ 0.772 \\ -1.287 \\ -2.316 \end{bmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 2.316 & 0.772 & -0.257 & 0.772 & -1.287 & -2.316 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2.316 \\ 0.772 \\ -0.257 \\ 0.772 \\ -1.287 \\ -2.316 \end{bmatrix} = \underline{13.636}$$

$$\Rightarrow R^2 = \frac{\text{SQ REG}}{\text{SQ TOT}} = \frac{13.636}{18.833} = \underline{0.724} \quad (= 72.4\%)$$

$$\Rightarrow r = \sqrt{R^2} = \sqrt{0.724} = \underline{0.851}$$

$$3) t = \frac{\beta - 0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{\sum (x - \bar{x})^2}}} \rightarrow \text{dove } \sigma^2 = \frac{\sum (y - \hat{y})^2}{n - 2} \quad \text{e} \quad \sum (y - \hat{y})^2 = \text{SQ ERR}$$

$\rightarrow \sum (x - \bar{x})^2$ scritto in termini matriciali è: $(x - \bar{x})' \cdot (x - \bar{x})$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{5.197}{4} = \underline{1.299}$$

$$\Rightarrow (x - \bar{x})' \cdot (x - \bar{x}) = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \\ 9 \\ 13 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.5 \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{bmatrix} \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 11 \\ 9 \\ 13 \\ 15 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 10.5 \\ // \\ // \\ // \\ // \\ // \end{bmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} \end{pmatrix}' \cdot \begin{pmatrix} \begin{bmatrix} -4.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -4.5 & -1.5 & 0.5 & -1.5 & 2.5 & 4.5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -4.5 \\ -1.5 \\ 0.5 \\ -1.5 \\ 2.5 \\ 4.5 \end{bmatrix} = 51.5$$

$$\Rightarrow t = \frac{-0.515}{\sqrt{\frac{1.299}{51.5}}} = \underline{-3.24} \rightarrow \text{Confronto con il valore di } t \text{ per } 4 \text{ gdl sulla tavola B a pag. 527 del libro e vedo che (in valore assoluto) è maggiore. } |-3.24| > 2.776, \text{ per cui rifiuto } H_0.$$