Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2018-2019, sessione estiva, primo appello

COGNOME ______ NOME ______

N. Matricola ______ Anno di corso ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Al variare di $a \geq 1$ calcolare il limite

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\int_x^{2x}\left(\tan(t^{-a}) - \frac{t^{-3}}{3}\right)dt - \tanh(x)\log(2)}{\underbrace{\log\left(1+\frac{1}{x^6}\right)}_{\frac{1}{x^6}(1+o(1))}} =: L_a$$

Ricordare $\tanh(x) = 1 + o(x^{-n})$ $\forall x$ per $x \to +\infty$

Ricordare $\tan(y) = y + \frac{2y^3}{3!} + \frac{16}{5!}y^5 + o(y^5)$ per $y \to 0$

Infatti $tg'(y) = \frac{1}{\cos^2(y)} = 1 + tg^2(y)$

$tg''(y) = 2\,tg(y)(1+tg^2(y)) = 2\,tg(y) + 2\,tg^3(y)$

$tg'''(y) = 2(1+tg^2(y)) + 6\,tg^2(y)(1+tg^2(y)) = 2 + 8\,tg^2(y) + 6\,tg^4(y)$

$tg^{(4)}(y) = 2 + 16\,tg(y)(1+tg^2(y)) + 24\,tg^3(y)(1+tg^2(y))$

Infine $tg^{(5)}(0) = 16$. Ovviamente $tg'(0) = 1$ e $tg'''(0) = 2$

$\text{Numeratore} = \int_x^{2x}\left(t^{-a} + \frac{1}{3}t^{-3a} + \frac{2}{15}t^{-5a} + o(t^{-5a}) - \frac{t^{-3}}{3}\right) - \lg 2 + o(x^{-n})$

Se $a > 1$ l'integrale converge a 0 e

$$L_a = \lim_{x\to+\infty} -x^6 \lg 2 = -\infty$$

Se $a = 1$ $\text{Numeratore} = \int_x^{2x}\left(t^{-1} + \cancel{\frac{1}{3}t^{-3}} + \frac{2}{15}t^{-5} + o(t^{-5}) - \cancel{\frac{t^{-3}}{3}}\right) - \lg(2) + o(x^{-n})$

$$= \frac{1}{30}\Big[t^{-4}\Big]_x^{2x} + o(x^{-n}) = -\frac{1}{2^4\,30}x^{-4}(1+o(1))$$

$$L_1 = -\frac{1}{2^5 \cdot 15}$$

ESERCIZIO N. 2. Si determini (facendo anche un disegno) l'insieme

$$E = \{z \in \mathbb{C} : Re\left(\frac{z^2}{2z+i}\right) \geq 0\}.$$

$$Re\left(\frac{z^2}{(2z+i)}\right) = \frac{1}{|2z+i|^2} Re\left(z^2(2\bar{z}-i)\right) \geq 0$$

$$\iff Re\left(z^2(2\bar{z}-i)\right) \geq 0$$

Abbiamo $Re\left(z^2(2\bar{z}-i)\right) = Re\left(2|z|^2 z - i z^2\right) =$

$$= 2|z|^2 Re\, z - Re(iz^2) = 2|z|^2 Re\, z + Im\, z^2$$

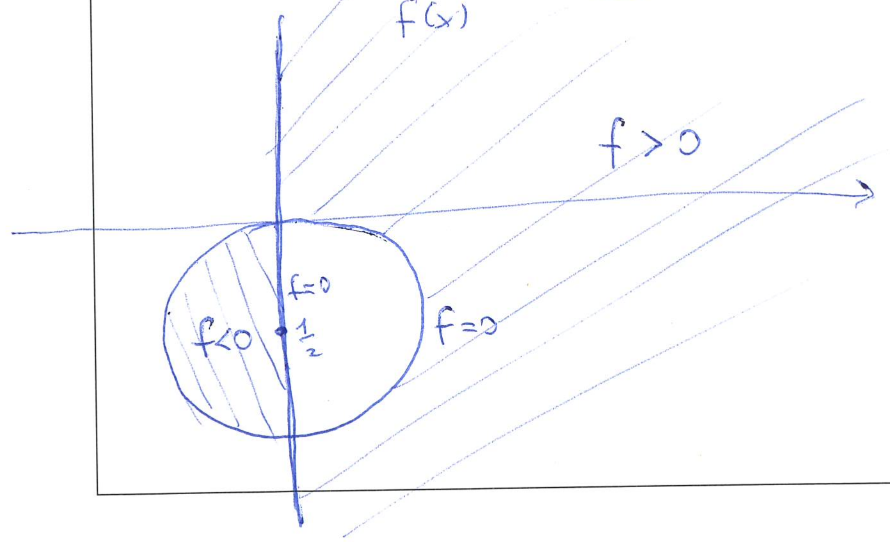
per $z = x+iy$

$$= 2(x^2+y^2)x + 2xy \geq 0$$

$$2x\left(x^2+y^2+y\right) \geq 0 \iff x\left(x^2+y^2+2\tfrac{1}{2}y\right) \geq 0$$

$$\iff \underbrace{x\left(x^2+\left(y+\tfrac{1}{2}\right)^2-\tfrac{1}{4}\right)}_{f(x)} \geq 0.$$

Quindi l'insieme E è dato da asse y, circonferenza (dove vale =) e la regione "grigia"



COGNOME e NOME ______________________________ N. Matricola ____________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_x^{2x} \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}dt & \text{se } x > 0, \\ \displaystyle\int_0^{x} \frac{2}{t^2-3t+2} & \text{se } x \le 0. \end{cases}$$

Si determinino:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^{-1}(1+t^{-2})^{-\frac{1}{2}}dt = \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\left(t^{-1}-\frac{1}{2}t^{-3}+o(t^{-3})\right)dt.$

$= \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x} t^{-1}dt = \lg 2.$

$= \frac{A}{t-1}+\frac{B}{t-2} = \frac{2}{(t-1)(t-2)}$ $\quad A = \frac{2}{t-2}\Big|_{t=1} = -2$, necessariamente $B=2$

$\int_0^{-\infty}\left(\frac{-2}{t-1}+\frac{2}{t-2}\right)dt = \lim_{x\to-\infty} 2\lg\left(\frac{2-t}{1-t}\right)\Big]_0^x = -2\lg(2)$

- si verifichi che $f \in C^1(\mathbb{R})$ e si calcoli la derivata $f'(x)$;

$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^2-3x+2} & \text{per } x<0 \\ \frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} - \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \text{per } x>0 \end{cases}$

Notare che $\lim_{x\to 0^-} f'(x) = 1 \overset{\text{Hopital}}{=} f'_s(0)$

$\lim_{x\to 0^+} f'(x) = 1 = f'_d(0)$

quindi esiste $f'(0)=1$ ed $f\in C^1(\mathbb{R})$

- si stabilisca dove $f(x)$ e' crescente e dove e' decrescente;

per $x<0$ ho $f'(x) = \frac{2}{x^2-3x+2} > 0$

per $x>0$ risulta $f'(x)>0$, perché $\frac{2}{\sqrt{1+4x^2}} > \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \iff \frac{4}{1+4x^2} > \frac{1}{1+x^2} \iff 4+4x^2 > 1+4x^2 \iff 4>1$

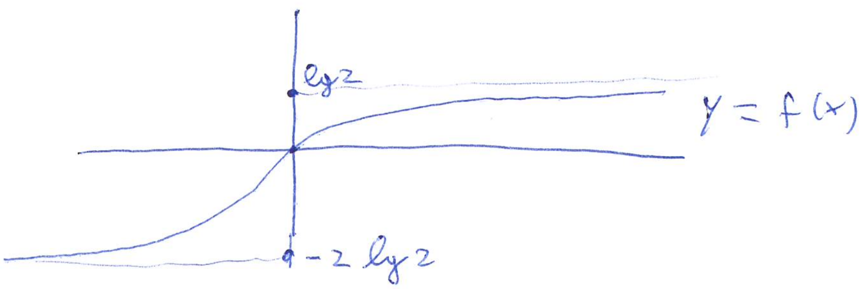
- si determini dove $f(x)$ e' concava , dove e' convessa, ed i flessi, infine si tracci il grafico.

È evidente che x^2-3x+2 è positiva decrescente in $(-\infty,0)$ e quindi $f'(x) = \frac{2}{x^2-3x+2}$ è crescente in $(-\infty,0)$, dove pertanto f è convessa

per $x>0$, $f''(x) = \frac{2\left(-\frac{1}{2}\right)4\cdot 2x}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} - \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)2x}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} = x\left(\frac{-8}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\right)$

Abbiamo per $x>0$ $f''(x)<0$. Infatti $f''(x)<0 \iff \frac{8}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$

$\iff \frac{2^3}{(1+4x^2)^{\frac{3}{2}}} > \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \iff \frac{4}{1+4x^2} > \frac{1}{1+x^2}$ ecc. (Vedi sopra)



ESERCIZIO N. 4.

(i) Calcolare il polinomio di McLaurin $p_5(x)$ (di ordine 5) di $f(x) = \dfrac{1}{1+x+x^2}$;

Ricordare $\dfrac{1}{1+y} = 1 - y + y^2 - y^3 + y^4 - y^5 + o(y^5)$. Posto $y = x + x^2$

$$f(x) = \frac{1}{1+(x+x^2)} = 1 - (x+x^2) + (x+x^2)^2 - (x+x^2)^3 + (x+x^2)^4 - (x+x^2)^5 + o((x+x^2)^5)$$

Notare che $o((x+x^2)^5) = o(x^5)$. Espandendo i binomi ed assorbendo in $o(x5)$ tutte le potenze x^n con $n > 5$, abbiamo

$$f(x) = 1 - (x + \cancel{x^2}) + \cancel{x^2} + 2x^3 + x^4 - (x^3 + 3x^4 + 3x^5) + x^4 - x^5 + o(x^5)$$

$$= 1 - x + (2-1)x^3 + (1-3+1)x^4 - 4x^5 + o(x^5)$$

$$f(x) = 1 - x + x^3 - x^4 - 4x^5 + o(x^5)$$

Necessariamente, $P_5(x) = 1 - x + x^3 - x^4 - 4x^5$

(ii) Approssimare $\int_0^1 e^{x^2}dx$ con un numero razione con un errore $< 0,01$.

Ricordare per $0 < y \leq 1$

$$e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + \frac{e^{c_y}}{(n+1)!} y^{n+1} \quad \text{con} \quad 0 < c_y < y.$$

Quindi,

$$\int_0^1 e^{x^2} dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{\int_0^1 x^{2j} dx}{j!} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)!} \int_0^1 e^{c_{x^2}} x^{2n+2} dx}_{\text{Errore}(n)}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \frac{1}{j!\,(2j+1)} + \text{Errore}(n)$$

Q

$$|\text{Errore}(n)| \leq \frac{3}{(n+1)!} \int_0^1 x^{2n+2} dx = \frac{3}{(n+1)!\,(2n+3)}$$

	$n=1$	$n=2$	$n=3$	$n=4$
$(n+1)!\,(2n+3) =$	10	42	216	1320

$$\frac{3}{1320} < \frac{1}{100}$$