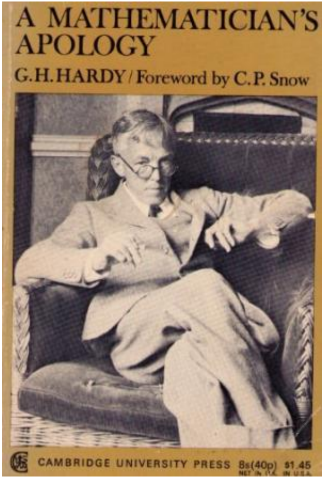
Apologia della matematica impura.

Ultima lezione di Analisi Complessa

Giovanni Alessandrini

dipartimento di matematica e geoscienze
Università degli Studi di Trieste

Trieste, 10 giugno 2019



«ci sono due matematiche:
la vera matematica dei veri matematici,
e quella che chiamerò la matematica banale.» Godfrey H. Hardy (1940).
317

Perché impura?

Carlo Pucci

L'esposizione della matematica segue il metodo logico-deduttivo,
ma la ricerca matematica si basa sull'intuizione e su procedimenti induttivi.

Perché impura?

- La matematica è un prodotto della conoscenza umana

Perché impura?

- La matematica è un prodotto della conoscenza umana
- La misura del rigore matematico si evolve nel tempo

Perché impura?

- La matematica è un prodotto della conoscenza umana
- La misura del rigore matematico si evolve nel tempo

  Il consenso tra gli esperti, su ciò che è vero o falso, ciò che è corretto o meno, è più ampio che non per altre discipline

Perché impura?

- La matematica è un prodotto della conoscenza umana
- La misura del rigore matematico si evolve nel tempo

  Il consenso tra gli esperti, su ciò che è vero o falso, ciò che è corretto o meno, è più ampio che non per altre discipline
- Le applicazioni alimentano la teoria, e la teoria spesso anticipa le applicazioni

Problemi Mal Posti

Problemi Mal Posti

Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice ben posto se:

Problemi Mal Posti

Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice ben posto se:

- Una soluzione esiste.

Problemi Mal Posti

Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice ben posto se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.

Problemi Mal Posti

Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice ben posto se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.
- La soluzione dipende con continuità dai dati (stabilità).

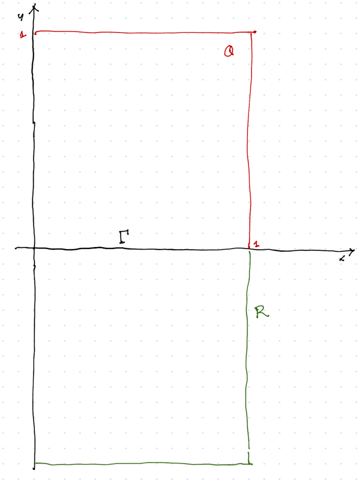
Problemi Mal Posti

Jacques Hadamard (1902–10): un problema si dice ben posto se:

- Una soluzione esiste.
- La soluzione è unica.
- La soluzione dipende con continuità dai dati (stabilità).

« I problemi che hanno origine da modelli della fisica matematica sono ben posti » (?)

Un esempio: il problema di Cauchy



Un esempio: il problema di Cauchy

Sia $Q = (0,1) \times (0,1)$, $\Gamma = (0,1) \times 0$, data $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua, trovare f olomorfa in Q tale che $f|_{\Gamma} = \varphi$.

Un esempio: il problema di Cauchy

Sia $Q = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Gamma = (0, 1) \times 0$, data $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua, trovare f olomorfa in Q tale che $f|_\Gamma = \varphi$.

Date $h, k : \Gamma \to \mathbb{R}$, trovare $u \in C^2(Q) \cap C(Q \cup \Gamma)$ tale che

$$\Delta u = 0 \text{ in } Q \, ,$$

$$u|_\Gamma = h \, , \; \partial_y u|_\Gamma = k \, .$$

Un esempio: il problema di Cauchy

Sia $Q = (0,1) \times (0,1)$, $\Gamma = (0,1) \times 0$, data $\varphi : \Gamma \to \mathbb{C}$ continua, trovare f olomorfa in Q tale che $f|_\Gamma = \varphi$.

Date $h, k : \Gamma \to \mathbb{R}$, trovare $u \in C^2(Q) \cap C(Q \cup \Gamma)$ tale che

$$\Delta u = 0 \text{ in } Q \,,$$

$$u|_\Gamma = h \,,\; \partial_y u|_\Gamma = k \,.$$

$$\varphi(x) = h(x) - i \int k(x) dx \,.$$

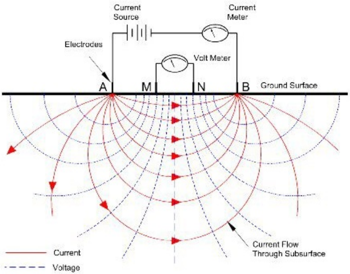
Unicità? SI:
Supponiamo $\varphi = 0$, per il Teorema di riflessione di Schwarz, f si estende a una funzione olomorfa in $R = (0,1) \times (-1,1)$ e $f = 0$ su tutto Γ, che ha punti di accumulazione interni a R, per il Principio di Unicità, $f \equiv 0$.

Esistenza? NO.
Se $\Im m\varphi = 0$ si può ancora usare il Teorema di riflessione di Schwarz, f si estende a una funzione olomorfa in $R = (0,1) \times (-1,1)$ e $u(x,0) = \Re e\varphi(x)$ è analitica reale su Γ.

Stabilità? NO.
$f_n(z) = \frac{1}{n} e^{-inz}$, $f_n|_\Gamma \to 0$, $|f_n(x + i\frac{1}{2})| = e^{n/2} \to \infty$.

Conrad e Marcel Schlumberger

Mappe del sottosuolo da misure elettriche, 1912–1919.



Grazie a: Schlumberger, OpenEI

Il Principio di Unicità

– Sia Ω aperto connesso, se f, olomorfa in Ω, si annulla di ordine infinito in $z_0 \in \Omega$

$$|f(z)| = \mathcal{O}(|z - z_0|^N) \ , \forall N$$

allora $f \equiv 0$.

Il Principio di Unicità

– Sia Ω aperto connesso, se f, olomorfa in Ω, si annulla di ordine infinito in $z_0 \in \Omega$

$$|f(z)| = \mathcal{O}(|z - z_0|^N) \ , \forall N$$

allora $f \equiv 0$.
– Se u è armonica in Ω e $|\nabla u|$ si annulla di ordine infinito in un punto $z_0 \in \Omega$ allora $u \equiv$ *costante*. Si pone $f = \partial_z u$.

Il Principio di Unicità

– Sia Ω aperto connesso, se f, olomorfa in Ω, si annulla di ordine infinito in $z_0 \in \Omega$

$$|f(z)| = \mathcal{O}(|z - z_0|^N) \ , \forall N$$

allora $f \equiv 0$.
– Se u è armonica in Ω e $|\nabla u|$ si annulla di ordine infinito in un punto $z_0 \in \Omega$ allora $u \equiv \mathit{costante}$. Si pone $f = \partial_z u$.

– Più in generale, in dimensione $n \geq 2$, se u risolve

$$\Delta u = 0 \text{ in un aperto connesso } \Omega$$

e $|\nabla u|$ si annulla di ordine infinito in un punto $x_0 \in \Omega$, allora $u \equiv \mathit{costante}$.

NB: $\Delta u = \operatorname{div} \nabla u$.

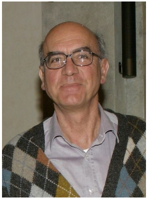
Il p–Laplaciano

Eugene B. Fabes

1980. Problema: l'equazione

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, p > 1$$

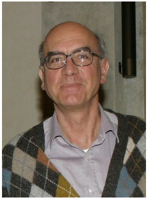
soddisfa il Principio di Unicità?



Giorgio Talenti

1981, un'identità. Se $n = 2$:

$$\Delta \log |\nabla u| = \operatorname{div}\left(\frac{\Delta u}{|\nabla u|^2}\nabla u\right) \quad \text{dove } \nabla u \neq 0 \ .$$



Giorgio Talenti

1981, un'identità. Se $n = 2$:

$$\Delta \log |\nabla u| = \operatorname{div} \left(\frac{\Delta u}{|\nabla u|^2} \nabla u \right) \quad \text{dove } \nabla u \neq 0 \ .$$

C. E. Weatherburn 1931!

1986, G.A.: se $n = 2$ il p–Laplaciano soddisfa il Principio di Unicità.

1986, G.A.: se $n = 2$ il p–Laplaciano soddisfa il Principio di Unicità.
1983, B. Bojarski, T. Iwaniec: altra dimostrazione!
Posto $f = \partial_z u$, vale

$$f_{\bar{z}} = (\frac{1}{p} - \frac{1}{2}) \left(\frac{\bar{f}}{f} f_z + \frac{f}{\bar{f}} \overline{f_z} \right)$$

1986, G.A.: se $n = 2$ il p–Laplaciano soddisfa il Principio di Unicità.
1983, B. Bojarski, T. Iwaniec: altra dimostrazione!
Posto $f = \partial_z u$, vale

$$f_{\bar{z}} = \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{\bar{f}}{f} f_z + \frac{f}{\bar{f}} \overline{f_z}\right)$$

1987, J. Manfredi

Equazione di Beltrami

Eugenio Beltrami, 1835–1900

$$f_{\overline{z}} = \mu f_z$$

dove

$$|\mu| \leq k < 1$$

Equazione di Beltrami

Eugenio Beltrami, 1835–1900

$$f_{\bar{z}} = \mu f_z$$

dove

$$|\mu| \leq k < 1$$

Mappe quasi–conformi!

Qualcosa da portarsi a casa

Problema: in dimensione $n > 2$, l'equazione

$$\operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) = 0, p > 1$$

soddisfa il Principio di Unicità?

GRAZIE !!!

ORA SI BRINDA!