Analisi Matematica II

Corso di Laurea in Fisica - 12 CFU

Prof. Andrea Sfecci

Programma — adattamento per studenti di A.A. precedenti. —

IMPORTANTE Negli ultimi anni accademici il programma ha subito sostanziali modifiche. Leggere le note in fondo soprattutto se non siete iscritti all'A.A. 2018/2019!

Testi consigliati

- E. Giusti, Analisi Matematica 1 e 2, terza edizione, Bollati Boringhieri, 2002 e 2003.
- E. Giusti, Esercizi e complementi di analisi matematica, volume primo e secondo, Bollati Boringhieri, 1991 e 1992.
- M. Bramanti, C.D. Pagani e S. Salsa, Analisi matematica 1 e 2, Zanichelli, 2008 e 2009 (esiste un eserciziario associato).
- M. Fusco, P. Marcellini, C. Sbordone, Analisi matematica 2, Liguori, 2001 (esiste un eserciziario associato).
- R. Adams, Calcolo differenziale 2, Editrice Ambrosiana, Zanichelli, 2014.
- W. Rudin, Principi di Analisi Matematica, McGraw-Hill, 1991.

1 Serie numeriche, integrali di Riemann in senso generalizzato e serie di potenze

Definizione di serie numerica. Serie convergenti, divergenti, indeterminate. Linearità per le serie convergenti. Condizione necessaria per la convergenza di una serie. La serie geometrica. La serie armonica. Serie a termini positivi e loro criteri di convergenza: criterio del confronto, criterio del confronto asintotico, criterio del rapporto, criterio della radice, criterio di condensazione di Cauchy. La serie armonica generalizzata. Criterio di Cauchy. Serie assolutamente convergenti. Serie a segni alterni e criterio di Leibniz. Integrali di Riemann in senso generalizzato per funzioni illimitate o su intervalli illimitati. Integrali in senso improprio (cenni). Criterio integrale di convergenza per serie. Serie di potenze e raggio di convergenza. Derivazione e integrazione termine a termine (senza dimostrazione). Serie di Taylor e funzioni analitiche. Serie di Taylor di alcune funzioni importanti.

2 Spazi metrici

Spazi metrici: intorni, insiemi aperti, insiemi chiusi. Interno, chiusura e frontiera di un insieme. Definizione di completezza e compattezza di uno spazio metrico. Continuità e limiti di funzioni tra spazi metrici. Lo spazio $\mathbb{R}^N$: prodotto scalare, norma, distanza. Completezza di $\mathbb{R}^N$ e caratterizzazione dei sottoinsiemi compatti di $\mathbb{R}^N$. Funzioni di più variabili reali a valori vettoriali: continuità. Richiami sulle applicazioni lineari: matrice associata.

3 Calcolo differenziale in più variabili

Derivate direzionali e derivate parziali. Funzioni differenziabili, differenziale di una funzione. Matrice Jacobiana e gradiente. Sottospazio (affine e vettoriale) tangente e approssimante lineare. Il teorema del differenziale totale. Differenziale della funzione composta (senza dimostrazione). Teorema del valor medio e sue conseguenze. Derivate successive. Matrice Hessiana. Il teorema di Schwarz (con dimostrazione). Funzioni di classe C^k. Polinomi in più variabili. Formula di Taylor (senza dimostrazione). Problemi di massimo e minimo. Massimi e minimi locali. Condizioni necessarie per massimi e minimi locali: equazione di Eulero. Condizioni necessarie e sufficienti per massimi e minimi locali: studio della matrice Hessiana. Teorema delle funzioni implicite o del Dini, caso $N = 2$. Teorema delle funzioni implicite, caso generale (senza dimostrazione). Teorema di inversione locale (con dimostrazione). Proprietà geometriche del gradiente e degli insiemi di livello. Problemi di massimo e minimo vincolato. Teorema dei moltiplicatori di Lagrange.

4 Integrale di Riemann in più variabili

Definizione di integrale di Riemann in più variabili e sue caratterizzazioni. Misura di Peano-Jordan: insiemi misurabili e insiemi di misura nulla. Proprietà dell'integrale e della misura. Teorema della media. Teorema di riduzione. Principio di Cavalieri. Integrazione per fili e per strati. Volume dei solidi di rotazione. Domini normali e integrazione sui domini normali. Teorema di cambiamento di variabili (senza dimostrazione). Coordinate polari nel piano e coordinate sferiche e cilindriche nello spazio. Teorema di Guldino. Applicazioni: calcolo di baricentri e momenti di inerzia.

5 Equazioni differenziali ordinarie

Funzioni Lipschitziane in $\mathbb{R}^N$. Funzioni localmente Lipschitziane. Lemma di Gronwall. Problema di Cauchy. Definizione di soluzione e formulazione integrale del problema. Teorema di esistenza e unicità locale. Teorema di unicità globale. Soluzioni massimali. Teorema di uscita dal compatto. Teorema di esistenza globale. Esempi di equazioni le cui soluzioni esplodono in tempo finito. Tecniche di risoluzione per equazioni scalari del primo ordine. Equazioni a variabili separate, equazioni omogenee, equazioni lineari, Equazione di Bernoulli.

$\hookrightarrow$ Continua ! $\hookrightarrow$

Equazioni lineari di ordine superiore. Spazio delle soluzioni e sua dimensione. Matrice Wronskiana. Equazioni a coefficienti costanti: polinomio caratteristico e determinazione delle soluzioni fondamentali (senza dim. per equazioni di ordine superiore al secondo). Esempio: l'oscillatore armonico smorzato. Equazioni non omogenee. Variazione delle costanti. Alcuni casi in cui si può utilizzare il metodo della somiglianza (tecnica dell'Ansatz). Esempio: l'oscillatore armonico smorzato con termine forzante.

Note

Se siete iscritti all'A.A. 2018/2019 il vostro programma termina qui e ignorate i colori del testo.

In rosso le leggere modifiche rispetto all'anno accademico precedente. Gli iscritti all'A.A. 2017/2018 sono pregati di attenersi a questa piccola variazione.

In blu le parti non richieste per chi è iscritto agli A.A. 2016/2017, 2015/2016, 2014/2015, leggere anche quanto segue.

In magenta la parte di programma non richiesta ALL'ORALE agli iscritti degli A.A. 2015/2016, 2014/2015

Alunni degli A.A. precedenti il 2014/2015 contattino il professore almeno due settimane prima dello scritto!

Per chi è iscritto agli A.A. 2016/2017, 2015/2016, 2014/2015 si ricorda che fa parte del programma anche quanto segue:

6 Integrale di Riemann in una dimensione

Partizioni di un intervallo. Somme di Riemann. Definizione di funzione integrabile e di integrale. Esempio di funzione non integrabile. Criterio di integrabili. Integrabilità delle funzioni continue, continue a tratti e monotone. Proprietà dell'integrale: linearità additivi, monotonia. Teorema della media integrale. Integrabilità della composizione di una funzione continua con una funzione integrabile. Conseguenze, corollari. Definizione di funzione integrale. Primo teorema fondamentale del calcolo. Definizione di primitiva e struttura dell'insieme delle primitive. Secondo teorema fondamentale del calcolo. Tecniche di integrazione: integrazione diretta; integrazione per parti; integrazione per sostituzione diretta e inversa. Integrazione delle funzioni razionali: fratti semplici e loro primitive; scomposizione in fratti semplici; trattazione completa della primitivazione delle funzioni razionali.