

**ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A**  
**PROVA SCRITTA DEL 13/06/19**

- (1) Sia  $(X, \mathcal{A}, \mu)$  uno spazio con misura. Siano  $f_n, f$  funzioni misurabili su  $X$ ,  $n = 1, 2, \dots$  tali che

$$f_n \rightarrow f \text{ in misura .}$$

Sia

$$\|f_n\|_5 \leq 1, \forall n .$$

Stabilire se  $f \in L^5(X)$ .

- (2) Sia  $f \in L^2(\mathbb{R})$ . determinare, se esiste

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mu\left(\left\{f > \frac{2k}{k+1}\right\}\right) .$$

- (3) Calcolare, se esiste, il limite

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0,1]} \frac{x^{2n} + 1}{x^{2n} + x^n + 1} d\mu(x) .$$