Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 18 giugno 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
BEORCHIA	VALENTINA
Corso di Laurea	**Anno di immatricolazione**

(1) Si dia la definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale e di norma di un vettore. Si illustri e si dimostri la diseguaglianza di Cauchy-Schwarz.

(2) Siano $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare definita da

$$g\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2 + y_3 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scrivano le matrici $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}'}(f)$ e $B := M^{\mathcal{E}'}_{\mathcal{E}}(g)$ di f e g nelle basi canoniche $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$ e $\mathcal{E}'$ di $\mathbb{R}^2$.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$, $\mathrm{Im} f$, $\ker g$ e $\mathrm{Im} g$.

$rg\, A = 2 = rg\, f$, $\dim \ker f = 2 - rg\, f = 0$,

$rg\, B = 2 = rg\, g$, $\dim \ker g = 3 - rg\, g = 1$

(c) Si dica, motivando la risposta, se $\mathrm{Im} f$ e $\ker g$ sono in somma diretta in $\mathbb{R}^3$. Sì

base di $\mathrm{Im} f$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$,

equazioni di $\ker g$: $\begin{cases} y_2 + y_3 = 0 \\ y_3 - y_1 = 0 \end{cases}$, base di $\ker g$: $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$rg \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f + \ker g) = 3 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im} f \cap \ker g) = 0$ per Grassmann.

(d) Si dica se l'applicazione lineare composta $h = g \circ f$, $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, è un isomorfismo, e in caso affermativo si determini l'isomorfismo inverso.

$$h\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = g\left(f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = g\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 + x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 - x_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(h) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\det M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(h) \neq 0 \Rightarrow h$ è isomorfismo

$$M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(h^{-1}) = \left(M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(h)\right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow h^{-1}\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2\, z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}.$$

(3) Si consideri la matrice

$$B = \begin{pmatrix} \overset{1}{\cancel{0}} & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_{L_B}(t) = \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 1 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 1 & 2 & -t \end{pmatrix} = (1-t)\left[(1-t)(-t)-4\right] + 1\cdot\left(-(1-t)\right)$$

$$= (1-t)\left(t^2-t-4-1\right) = (1-t)\left(t^2-t-5\right)$$

radici : $\left\{1, \frac{1+\sqrt{21}}{2}, \frac{1-\sqrt{21}}{2}\right\} = Sp(L_B)$

- Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

Autospazi: $V_1 = \ker(L_B - \mathbb{I}d_3)$ eq. $\begin{cases} z=0 \\ x+2y-z=0 \end{cases}$: $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$

$V_{\frac{1+\sqrt{21}}{2}} = \ker\left(L_B - \frac{1+\sqrt{21}}{2}\mathbb{I}d_3\right)$ eq. $\begin{cases} \frac{1-\sqrt{21}}{2}x + z = 0 \\ \frac{1-\sqrt{21}}{2}y + 2z = 0 \end{cases}$ $\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1/\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}} \\ 2/\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}}} \end{pmatrix}\right\}$

Analogamente $V_{\frac{1-\sqrt{21}}{2}} = \mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix} 1/k \\ 2/k \\ -\frac{1+\sqrt{21}}{2k} \end{pmatrix}\right\}$ con $k = \sqrt{5+\frac{11+\sqrt{21}}{2}}$

- ~~Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$.~~

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} -2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}} \\ 2/\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5+\frac{11-\sqrt{21}}{2}}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5+\frac{11+\sqrt{21}}{2}} \\ 2/\sqrt{5+\frac{11+\sqrt{21}}{2}} \\ \frac{-1+\sqrt{21}}{2\sqrt{5+\frac{11+\sqrt{21}}{2}}} \end{pmatrix} \right\}$$

(4) • Si trovino delle equazioni cartesiana e parametriche del piano $\overline{H}$ di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e parallelo al piano H di equazioni parametriche

$$H: \quad \begin{cases} x &= 4 + t \\ y &= 1 - s \\ z &= t + s \end{cases} .$$

$\overline{H}$: passante per $Q = (1,0,1)$, con giacitura $W = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

eq. parametriche di $\overline{H}$: $\boxed{\begin{cases} x = 1 + t \\ y = 0 - s \\ z = 1 + t + s \end{cases}}$, eq. cartesiana:

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z-1 \end{pmatrix} = 2$$

$$\xrightarrow{3^a - 1^a + 2^a} \begin{pmatrix} 1 & 0 & x-1 \\ 0 & -1 & y \\ 0 & 0 & z-1-x+1+y \end{pmatrix} : \quad \boxed{-x + y + z = 0}$$

• Si consideri, inoltre, la retta r di equazioni parametriche

$$\begin{cases} x = 1 - \tau \\ y = 4 \\ z = \tau \end{cases} .$$

Si determini la posizione reciproca della retta r e il piano H del punto precedente.

giacitura di H : $\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

giacitura di r : $\mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 3 \Rightarrow H \text{ e } r \text{ NON sono paralleli} \Leftrightarrow \text{sono incidenti in un punto}$$