Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2018-2019, sessione estiva, secondo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli $\lim_{x\to 0+} \frac{\sqrt{2+\frac{2}{1+x^a}} - \frac{1}{4}\sin(x^a) - 2\cos(x^a)}{\tanh\left(\frac{-1}{x}\right)\log\left(e^{x^2}+x^2\right)}$ al variare di $a \in (0,\infty)$.

$$th\left(-\frac{1}{x}\right) = -1 + \left(th\left(-\frac{1}{x}\right)-1\right) = -1 + o(x^n) = -1\,(1+o(x^n))$$

$$lg\left(e^{x^2}+x^2\right) = lg\left(1+e^{x^2}-1+x^2\right) = lg\left(1+2x^2+o(x^2)\right) = 2x^2(1+o(1))$$

$$\Rightarrow \text{denomin} = -2x^2\,(1+o(1))$$

$$\text{num} = \sqrt{2+\frac{2}{1+x^a}} - \frac{1}{4}\sin(x^a) - 2\cos(x^a) =$$

$$= \sqrt{2+2-2x^a+o(x^a)} - \frac{1}{4}\left(x^a+o(x^a)\right) - 2\left(1+o(x^a)\right)$$

$$= 2\sqrt{1-\frac{x^a}{2}+o(x^a)} - \frac{1}{4}\left(x^a+o(x^a)\right) - 2\left(1+o(x^a)\right)$$

$$= \cancel{2} - \frac{1}{2}x^a + o(x^a) - \frac{x^a}{4} + o(x^a) - \cancel{2} + o(x^a)$$

$$= -\frac{3}{4}x^a\,(1+o(1))$$

Quindi il limite e'

$$\lim_{x\to 0^+} \frac{-\frac{3}{4}x^a}{-2x^2} = \lim_{x\to 0^+} \frac{3}{8}x^{a-2} = \begin{cases} +\infty & 0<a<2 \\ \frac{3}{8} & a=2 \\ 0 & a>2 \end{cases}$$

ESERCIZIO N. 2. Si stabilisca il numero delle soluzioni $z \in \mathbb{C}$ dell'equazione $z^5 + |z|^2 = 1$.

In coordinate polari $z = r\cos\vartheta + i\,r\sin\vartheta$ diventa

$$\begin{cases} r^5\cos(5\vartheta) + r^2 = 1 \\ r^5 \sin(5\vartheta) = 0 \end{cases} \Rightarrow \sin(5\vartheta) = 0 \Rightarrow \cos(5\vartheta) = \pm 1$$

Se $\cos(5\vartheta) = -1$ la 1° equazione diventa

$r^5 + 1 = r^2$ che non ha soluzioni $r \geq 0$

(infatti, per $r < 1$ ho $r^2 < 1 \leq r^5 + 1$, se $r \geq 1$ ho $r^2 \leq r^2 < r^5 + 1$)

Se invece $\cos(5\vartheta) = 1$, allora la 1° equazione diventa $r^5 + r^2 - 1 = 0$. Per stabilire il numero delle soluzioni $r \geq 0$, posto $f(r) = r^5 + r^2 - 1$, noto che $f(0) = -1$, $\lim_{r \to +\infty} f(r) = +\infty$, e quindi c'è almeno una soluzione $r_1 > 0$. Inoltre, $f'(r) = 5r^4 + 2r > 0$ per $r > 0$, e quindi r_1 è l'unica soluzione. Infine

$5\vartheta = 2\pi k \Rightarrow \vartheta = \frac{2\pi}{5}k \quad k = 0, 1, 2, 3, 4.$

In totale, l'equazione ha 5 soluzioni

COGNOME e NOME ______________________ N. Matricola __________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x)=\begin{cases} \displaystyle\int_x^{x+1} \frac{1}{\log(\log(t+3))}dt & \text{se } x>0,\\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{\log(2^t+1)} + \int_0^1 \frac{1}{\log(\log(t+3))}dt & \text{se } x\le 0.\end{cases}$$

Si determinino:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$0<\int_x^{x+1}\frac{1}{lg(lg(t+3))}dt \le \frac{1}{lg(lg(x+3))} \xrightarrow{x\to+\infty} 0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$

$\frac{1}{lg(1+2^t)} \xrightarrow{t\to-\infty} +\infty \Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Per $x<0$ $f'(x)=\frac{1}{lg(2^x+1)}>0\ \forall x<0$ e $f'_s(0)=\lim_{x\to0^-} f'(x)=\frac{1}{lg 2}>0$

- si calcoli la derivata $f'(x)$ dove e' definita, altrimenti si calcolino $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$;

Per $x>0$ $f'(x)=\frac{1}{lg(lg(x+4))}-\frac{1}{lg(lg(x+3))}<0\ \forall x>0$

$f'_d(0)=\lim_{x\to0^+} f'(x)=\frac{1}{lg(lg 4)}-\frac{1}{lg(lg 3)}<0 \Rightarrow f'_d(0)\ne f'_s(0)$ ed $f'(0)$ non esiste

- si calcoli $f''(x)$ dove e' definita;

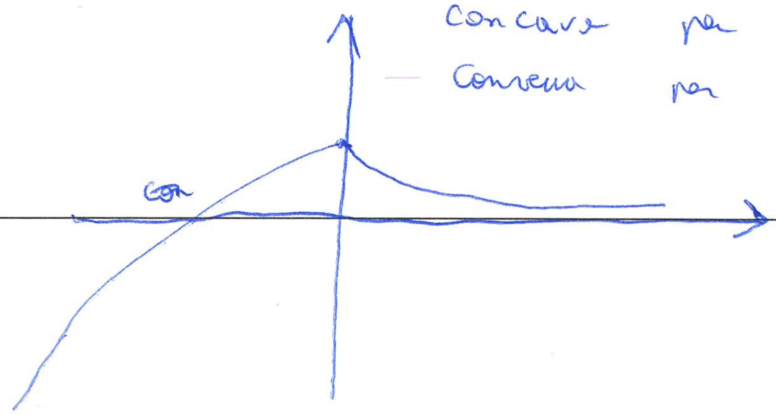
Per $x<0$, $f''(x)=-\frac{1}{lg^2(2^x+1)}\frac{1}{2^x+1}2^x lg 2<0$

- si determini dove $f(x)$ e' crescente, decrescente, concava , convessa, e si tracci il grafico.

Per $x>0$ $f''(x)=\frac{-1}{lg^2(lg(x+4))}\frac{1}{lg(x+4)}\frac{1}{x+4}+\frac{1}{lg^2(lg(x+3))}\frac{1}{lg(x+3)}\frac{1}{x+3}>0$

Concava per $x<0$

Convessa per $x>0$



ESERCIZIO N. 4.

(*i*) Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 2, $p_2(x)$, della funzione $f(x^2)$, con $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione inversa della funzione $x \to 3x + 2x^3$.

Siccome $3x+2x^3\big|_{x=0} = 0$, segue $f(0)=0$

Inoltre, $f'(0) = \dfrac{1}{(3x+2x^3)'(0)} = \dfrac{1}{3}$ e pertanto

$$f(x) = \frac{x}{3} + o(x) \Rightarrow f(x^2) = \frac{x^2}{3} + o(x^2)$$

con $P_2(x) = \dfrac{x^2}{3}$

(*ii*) Si approssimi $\int_0^1 x^2 \sin(x^3)dx$ con un numero razionale, con un errore $< \frac{1}{100}$.

$\sin(y) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \dfrac{y^{2j+1}}{(2j+1)!} + E_{2n+1}(y)$ dove per $y>0$ e $0<c_y<y$

$$|E_{2n+1}(y)| = \frac{|\sin^{(2n+2)}(c_y)|}{(2n+2)!} y^{2n+2} \le \frac{y^{2n+2}}{(2n+2)!}$$

Abbiamo $\int_0^1 x^2 \sin(x^3)\,dx = \int_0^1 \sum_{j=0}^{n} (-1)\dfrac{x^{6j+5}}{(2j+1)!}dx + \int_0^1 x^2 E_{2n+1}(x^3)\,dx$

$$= \underbrace{\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{(2j+1)!\,(6j+6)}}_{Q} + \int_0^1 x^2 E_{2n+1}(x^3)\,dx$$

L'errore lo stimo con $\dfrac{\int_0^1 x^{6n+8}\,dx}{(2n+2)!} = \dfrac{1}{(2n+2)!\,(6n+9)}$

n	1
$\frac{1}{(2n+2)!\,(6n+9)}$	$\frac{1}{24}\cdot\frac{1}{15} = \frac{1}{360} < \frac{1}{100}$

$n=1$ va bene