**Prima prova scritta di Geometria 1, 7 febbraio 2019**

1. Trovare le coordiante (o il vettore delle coordinate) del vettore $(a, b, c)$ rispetto alla base $a^1 = (1, 1, 1), a^2 = (1, 2, -1), a^3 = (0, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$. Trovare la matrice inversa della matrice $A$ che ha $a^1, a^2, a^3$ come vettori colonna.

2. Sia $V$ uno spazio vettoriale di dimensione finita, $V^*$ lo spazio duale di $V$ e $V^{**} = (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ lo spazio biduale di $V$. Per $v \in V$, sia $\tau_v : V^* \to K$ definita da

$$\tau_v(\phi) = \phi(v),$$

per ogni $\phi : V \to K$ in $V^*$. Dimostrare che:

i) $\tau_v : V^* \to K$ è lineare (e allora $\tau_v \in V^{**}$).

ii) $\tau : V \to V^{**}$, definita da $\tau(v) = \tau_v$, è lineare.

iii) $\tau : V \to V^{**}$ è un isomorfismo.

3. Sia $f : V \to U$ lineare, $W = \mathrm{Ker}(f)$ e $p : V \to V/W$ la proiezione $p(v) = [v]$ sullo spazio quoziente $V/W$. Dimostrare che esiste esattamente un'applicazione $\bar{f} : V/W \to U$ tale che $f = \bar{f} \circ p$, e che $\bar{f}$ è lineare e iniettiva.

4. Sia $V$ uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo anti-autoaggiunto, cioè

$$< v, f(w) >= - < f(v), w >,$$

per tutti $v, w \in V$. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di $f$ è in $i\mathbb{R}$ (un numero puramente immaginario o 0);

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) la matrice di $f$ rispetto a una base ortonormale di $V$ è anti-hermitiana ($A = -{}^t\bar{A}$);

iv) esiste una base ortonormale di autovettori di $f$.

5. Per la matrice ortogonale e unitaria

$$A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\mathrm{sen}\,\alpha \\ \mathrm{sen}\,\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

trovare una matrice unitaria $S$ e la sua inversa tale che $S^{-1}AS$ è diagonale (fare la prova).

6. i) Siano $f, g : V \to V$ endomorfismi di uno spazio vettoriale $V$ che commutano ($f \circ g = g \circ f$). Sia $\mathrm{Aut}_f(\lambda)$ un autospazio di $f$. Dimostrare che $g(\mathrm{Aut}_f(\lambda)) \subset \mathrm{Aut}_f(\lambda)$.

ii) Siano $f, g : V \to V$ automorfismi unitari di uno spazio unitario $V$ di dimensione finita che commutano. Dimostrare che esiste una base ortonormale di $V$ di autovettori communi di $f$ e $g$ (cioè, $f$ e $g$ sono diagonalizzabili simultaneamente).