Terza prova scritta di Geometria 1, 25 giugno 2019

1. Enunciare e dimostrare il teorema della determinazione di un'applicazione lineare su una base (unicità e esistenza).

2. i) Sia $f : V \to U$ un'applicazione lineare e $W = \mathrm{Ker}(f)$. Dimostrare che l'applicazione indotta $\bar{f} : V/W \to U$ definita da $\bar{f}([v]) = f(v)$ è ben definita, lineare e iniettiva.

ii) Siano W_1 e W_2 sottospazi di uno spazio vettoriale V. Dimostrare che l'applicazione $f : W_1 \to (W_1+W_2)/W_2$ definita da $f(w_1) = [w_1]$ è lineare e suriettiva, poi determinare il nucleo di f. Concludere che l'applicazione lineare indotta $\bar{f}$, definita come in i), è un isomorfismo tra $W_1/(W_1 \cap W_2)$ e $(W_1 + W_2)/W_2$.

3. Trovare la forma normale di Jordan della matrice A in dipendenza dei parametri a, b, c e d, trovando una base di Jordan e la matrice del cambiamento di base:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & b & c \\ 0 & 1 & 1 & d \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. i) Enunciare la disuguglianza di Cauchy-Schwarz per uno spazio unitario (complesso), poi dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma associata.

ii) Dimostrare che le due diagonali di un parallelogramma equilatero (un rombo) in $\mathbb{R}^2$ sono ortogonali.

5. Dimostrare che

$$\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}} : \mathrm{Hom}(V, W) \to \mathrm{M}(m \times n, K)$$

è un isomorfismo (lineare, iniettivo e suriettivo), dove $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}$ associa a un'applicazione lineare $f : V \to W$ la sua matrice $\mathrm{M}^{\mathcal{A}}_{\mathcal{B}}(f)$ rispetto alle basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W.