Seconda prova scritta di Geometria 1, 21 febbraio 2019

1. Sia $(v_i)_{i\in I}$ una base di uno spazio vettoriale V, per un insieme di indici I arbitrario, e siano $v_i^* \in V^*$ tali che $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$ (simbolo di Kronecker).

i) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che i vettori v_i^*, $i \in I$, generano V^* se e solo se V ha dimensione finita.

2. i) Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \ldots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W

ii) Sia $f : V \to U$ lineare e $W = \mathrm{Ker}(f)$. Dimostrare che l'applicazione $\bar{f} : V/W \to U$, con $\bar{f}([v]) = f(v)$, è ben definita, lineare e iniettiva.

3. i) Sia V uno spazio vettoriale di dimensione finita e $f : V \to W$ lineare. Dimostrare la formula di dimensione per applicazioni lineari: $\dim(V) = \dim(\mathrm{Ker}f) + \dim(\mathrm{Im}f)$.

ii) Siano W_1 e W_2 sottospazi di V e $f : W_1 \times W_2 \to V$ l'applicazione definita da $f(w_1, w_2) = w_1 + w_2$. Dimostrare che f è lineare, poi determinare il nucleo e l'immagine di f e le loro dimensioni. Applicando la formula in i), cosa si ottiene?

4. Trovare se la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

è diagonalizzabile o triangolarizzabile sui campi $K = \mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_7$ e $\mathbb{Z}_{13}$. Se A è triangolarizzabile ma non diagonalizzabile, trovare la forma normale di Jordan di A.

5. Trovare la forma normale di Jordan della matrice A, in dipendenza dei parametri a, b e c, e una base di Jordan.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & b \\ 0 & 1 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

6. i) Sia V uno spazio vettoriale sul campo K. Dimostrare che ogni funzione multilineare e alternante $D : V \times \ldots \times V = V^m \to K$ è banale se $m > n = dim(V)$.

ii) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V. Dimostrare che una funzione determinante (multilineare, alternante) $D : V \times \ldots \times V = V^n \to K$, con $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$, è unica (solo unicità: dedurre la formula di Leibniz).