

Dipartimento di Matematica e Geoscienze
Anno Accademico 2018/19
Registro lezioni del docente MEZZETTI EMILIA

Attività didattica

ADVANCED GEOMETRY 3 [534SM]

Periodo di svolgimento: *Secondo Semestre*

Docente titolare del corso: MEZZETTI EMILIA matr. 002830

Riepilogo registro docente:

MEZZETTI EMILIA matr. 002830

Docente interno - Professori Ordinari

Stato registro docente: Stampato

Ore inserite: 72 ore

Ore previste dall'offerta didattica: 72 ore

Gruppi di studenti con i quali è stata svolta l'attività - ore per gruppo

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 72 ore

Ore inserite per tipologia di attività

72 ore lezione :

- prevista per tutti gli studenti (senza gruppi associati) - 72 ore

Firma del docente:.....

Firma del direttore:.....

Data:.....

Dettaglio delle attività svolte:
ADVANCED GEOMETRY 3 [534SM]

04/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Introduction. Affine algebraic sets.

Descrizione attività:

Introduction to the course, its aims, methods of examination. Short historical introduction to algebraic geometry. Affine algebraic sets: definition and examples. Zariski topology.

07/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Projective algebraic sets. Graded rings.

Descrizione attività:

Projective zeroes of a polynomial. Homogeneous polynomials. Graded rings. Homogenous ideals. Projective algebraic sets. Zariski topology on the projective space.

08/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Product of affine spaces. Ideal of an algebraic set.

Descrizione attività:

Operations on homogeneous ideals. Irreducible hypersurfaces. Product of affine spaces: product topology vs. Zariski topology. Segre map, $P^1 \times P^1$ as a quadric in P^3 . Ideal of a subset in the affine space and its properties.

11/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Noether's Normalization Lemma

Descrizione attività:

Algebraically independent elements, transcendence bases, transcendence degree. Integral elements over a ring. Finitely generated algebras. Normalization Lemma (without proof).

14/03/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 14:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Proof of the Nullstellensatz

Descrizione attività:

Characterization of the maximal ideals in $K[x_1, \dots, x_n]$, K algebraically closed. Proof of the weak and strong Nullstellensatz, Rabinowitch's trick. Projective version of the Nullstellensatz.

15/03/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Projective closure

Descrizione attività:

Embedding of the affine space in the projective space. The Zariski and the induced topology coincide. Homogeneisation and dehomogeneisation of polynomials. Projective closure, its ideal, the case of a hypersurface and of the skew cubic.

18/03/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Minimal free resolution of the ideal of the skew cubic.

Descrizione attività:

The projective closure of the affine skew cubic; the generators of its ideal; minimal free resolution; syzygies. Irreducible topological spaces.

21/03/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 14:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Irreducible components

Descrizione attività:

Irreducible topological spaces, noetherian topological spaces, irreducible components, the case of algebraic affine and projective sets. The correspondence with prime ideals.

23/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Topological dimension.

Descrizione attività:

Irreducible components of a hypersurface. Exercises. Krull dimension of a topological space and its properties. Dimension of A^n and Krull dimension of a polynomial ring.

25/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Dimension of algebraic sets

Descrizione attività:

Coordinate ring and homogeneous coordinate ring. Hilbert function. Height of a prime ideal. Dimension as transcendence degree. Hypersurfaces are affine algebraic sets of pure codimension one.

28/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Regular functions

Descrizione attività:

Exercises. Regular functions on locally closed subsets of a projective space, their properties, the case of affine varieties.

29/03/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Rational functions

Descrizione attività:

Characterisation of regular functions on affine algebraic sets. The case of projective varieties. Rational functions. Example: the cuspidal plane cubic.

01/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Local ring of a point.

Descrizione attività:

Examples of regular and rational maps. The local ring of a point on a quasi-projective variety, its algebraic characterisation in the affine case. Regular maps: definition and functorial properties.

04/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

The inverse construction of the comorphism. A brief introduction to categories.

Descrizione attività:

Examples of regular and non-regular maps. Characterization of morphisms if the codomain is contained in an affine space. Inverse construction of the comorphism. A brief introduction to the language of categories.

05/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Equivalence of categories

Descrizione attività:

Covariant and contravariant functor. Equivalence of categories. Examples: forgetful functor, representable functors. The functor that associates to an algebraic variety its ring of regular functions. Equivalence between the categories of affine algebraic sets over K and of finitely generated reduced K -algebras, K algebraically closed. Stereographic projection.

08/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Examples of regular maps

Descrizione attività:

Automorphisms of A^n , P^n . Affine varieties, the complement of a hypersurface in an affine closed set is affine. A^2 minus a point is not affine.

11/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Veronese morphisms.

Descrizione attività:

All quasi projective varieties admit an open covering via affine varieties. Veronese morphisms. Veronese varieties and their properties.

12/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Rational and birational maps.

Descrizione attività:

Rational maps; the composition of dominant rational maps. Birational maps. The comorphism between the fields of rational functions; the inverse construction. Examples.

15/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Examples of rational maps.

Descrizione attività:

Two varieties are birational if and only if their rational functions fields are isomorphic. Rational maps from P^1 . The standard quadratic transformation. Projections.

18/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Examples of rational maps.

Descrizione attività:

Exercises. Examples of rational maps. Projections. Birational map between a smooth quadric and P^2 . Rational and unirational varieties.

29/04/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Segre variety

Descrizione attività:

Affine open covering of a projective variety with $D(f)$. Segre variety: definition and irreducibility.

02/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 11:00

Ora fine: 13:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Tensor product and coordinate free description of Segre maps.

Descrizione attività:

Irreducibility of Segre varieties. Segre product of projective and quasi-projective varieties. Tensor product of vector spaces: introduction, universal property, dimension. Coordinate-free description of the Segre map. Symmetric and exterior powers of a vector space.

03/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Symmetric and exterior algebra

Descrizione attività:

Symmetric powers of a vector space and symmetric algebra; coordinate-free description of the Veronese map. Introduction to the Grassmannians, the Klein quadric. Exterior powers and exterior algebra of a vector space.

06/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Grassmannians

Descrizione attività:

The Plucker map is well defined, injective and the image is closed. Covering of the Grassmannians with open affine subsets.

09/05/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 14:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Grassmannians and skew-symmetric matrices

Descrizione attività:

Irreducibility, dimension and equations of the Grassmannians. The case of the Grassmannian of lines of a projective space: skew-symmetric matrix associated to a 2-tensor; pfaffians; points of the Grassmannian as skew-symmetric matrices of rank 2.

10/05/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Examples of subvarieties of Grassmannians. Properties of the dimension.

Descrizione attività:

Exemples of subvarieties of Grassmannians: pencils of lines, lines on a smooth quadric, planes contained in $G(2,4)$. Summary of facts about dimension. Dimension of a product. The product of irreducible affine varieties is irreducible.

13/05/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 09:00**Ora fine:** 11:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Exercises. Theorem of the intersection.

Descrizione attività:

Discussion of exercises solved by the students. Proof of the theorem of the intersection.

16/05/2019 - lezione -**Docente:** MEZZETTI EMILIA**Ora inizio:** 14:00**Ora fine:** 16:00**Ore accademiche:** 2**Titolo attività:**

Some consequence of intersection theorem

Descrizione attività:

Irreducibility of a product. Intersection in the projective space. Proper intersection. Complete intersections. The skew cubic is not a complete intersection.

17/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Complete intersections. Complete varieties.

Descrizione attività:

Complete intersections and set-theoretic complete intersections. The skew cubic is set-theoretic complete intersection. Complete varieties. Examples, main properties.

23/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Completeness of projective varieties.

Descrizione attività:

Theorem of completeness of projective varieties and its consequences. Integral elements over a ring: equivalent statements.

24/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Integral extensions, finite morphisms.

Descrizione attività:

Characterisations of integral elements, integral extensions and their properties. Finite morphisms of affine varieties. Examples. The fibres are finite and not empty.

27/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Finite morphisms: properties and examples. Theorem on the dimension of fibres.

Descrizione attività:

The Lying-Over theorem; the finite morphisms are surjective and closed. Definition of finite morphisms in the general (non affine) case. Projections are finite morphisms. Geometric interpretation of the Normalisation Lemma. Theorem on the dimension of the fibres of a morphism.

30/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Hypersurfaces containing and not containing lines

Descrizione attività:

Application of the theorem on the dimension of the fibres: study of the incidence correspondence line-hypersurface of degree d in P^n . The hypersurfaces of degree $d > 2n-3$ do not contain any line. A general cubic surface in P^3 contains a finite number of lines. A cubic surface containing two skew lines is rational.

31/05/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Zariski tangent space and its dimension

Descrizione attività:

Definition of the Zariski tangent space. Its invariance by isomorphism. Embedded tangent space. Jacobian matrix. The minimal dimension of the tangent space is reached on a non-empty open subset.

06/06/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 14:00

Ora fine: 16:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Exercises. Primitive element theorem.

Descrizione attività:

Exercises. Dimension of the tangent space at a smooth point. Every variety is isomorphic to a hypersurface. Theorem of the primitive element.

07/06/2019 - lezione -

Docente: MEZZETTI EMILIA

Ora inizio: 09:00

Ora fine: 11:00

Ore accademiche: 2

Titolo attività:

Regular local rings and algebraic characterisation of smooth points.

Descrizione attività:

Regular local rings. Algebraic characterisation of smooth points. Local parameters. Mention of the problem of the resolution of singularities; the blow up of the plane at a point.
