ISTITUZIONI DI ANALISI E GEOMETRIA MOD A
PROVA SCRITTA DEL 02/07/19

(1) Stabilire se esiste ed eventualmente calcolare

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{(0,+\infty)}\frac{e^{-x^2}}{1+(x-n)^2}dx\ .$$

(2) Sia $(X,\mathcal{A},\mu)$ uno spazio con misura finito. Sia f una funzione misurabile nonegativa su X. Sia $1<p<\infty$ e sia p' il suo esponente coniugato. Si ponga

$$\nu(E)=\int_E f d\mu\ ,\forall E\in\mathcal{A}\ .$$

Provare:

(a) se $f\in L^p(X)$, allora

$$\nu(E)\le\mu(E)^{\frac{1}{p'}}\|f\|_p\ ,\forall E\in\mathcal{A}\ ,$$

(b) se vale

$$\nu(E)\le\mu(E)^{\frac{1}{p'}}\ ,\forall E\in\mathcal{A}\ ,$$

allora $f\in L^q(X)$ per ogni $q<p$.

(3) Sia $E\subset\mathbb{R}^n$ misurabile e di misura nulla. Sia $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ continua in ogni punto $x\in\mathbb{R}^n\setminus E$. Provare che f è misurabile.