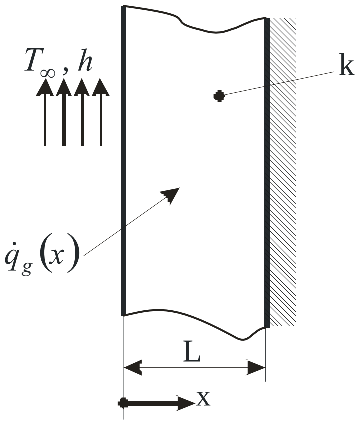
Prova scritta di Fisica Tecnica II – 19.04.2005
(Nuovo Ordinamento - Ing. Meccanica)

………………………..	………………………..	…………………..……
NOME e COGNOME	**CORSO di LAUREA**	**Voto/i**

Esercizio

Una parete piana, avente conducibilità termica k e spessore L, ha una superficie ($x = 0$) lambita da un fluido con temperatura T_∞ e coefficiente di scambio termico convettivo h.



La parete è esposta a radiazione di microonde, che dà origine ad un riscaldamento (generazione) di tipo volumetrico, il cui andamento è dato dalla relazione:

$$\dot{q}_g = \dot{q}_0 \left(1 - \frac{x}{L}\right)$$

dove $\dot{q}_0$ [W/m^3] è una costante.
L'altra superficie ($x = L$) della parete è perfettamente isolata.

Determinare la distribuzione di temperatura $T(x)$ all'interno della parete.

Soluzione

Si tratta di un problema di conduzione stazionaria, monodimensionale ed a proprietà costanti.

Dall'equazione di Fourier (conduzione), scritta per proprietà costanti in un sistema di riferimento Cartesiano, si ottiene:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_g}{k}$$

Sostituendo l'espressione di $\dot{q}_g$:

$$\frac{d^2T}{dx^2} = -\frac{\dot{q}_0}{k}\left(1-\frac{x}{L}\right)$$

Integrando due volte:

$$\frac{dT}{dx} = -\frac{\dot{q}_0}{k}\left(x-\frac{x^2}{2L}\right)+C_1\,; \qquad T(x) = -\frac{\dot{q}_0}{k}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6L}\right)+C_1x+C_2$$

Le costanti C_1 e C_2 sono determinate attraverso le condizioni al contorno:

1. Per $x = L$: $\quad q''\big|_{x=L} = 0 \quad \rightarrow \quad -k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = 0$

$$\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=L} = 0 = -\frac{\dot{q}_0}{k}\left(L-\frac{L^2}{2L}\right)+C_1 \qquad \rightarrow \qquad C_1 = \frac{\dot{q}_0\,L}{2k}$$

2. Per $x = 0$: $\quad q''_{conv} = h\big(T(0)-T_\infty\big) = -q''_{cond} = k\frac{dT}{dx}\bigg|_{x=0} = k\frac{\dot{q}_0\,L}{2k}$

   da cui ricaviamo la temperatura sulla superficie della parete

$$T(0) = T_\infty + \frac{\dot{q}_0 L}{2h}$$

   che sostituita nell'espressione $T(x)$ per $x = 0$, ci consente di ricavare la costante d'integrazione C_2:

$$T(0) = C_2 = T_\infty + \frac{\dot{q}_0 L}{2h}$$

La legge di distribuzione della temperatura è quindi:

$$T(x) = \frac{\dot{q}_0}{2k}\left(\frac{x^3}{3L}-x^2+Lx\right)+T_\infty+\frac{\dot{q}_0\,L}{2h}$$

<u>Nota</u>

Il valore della costante C_2 può ricavarsi anche da un bilancio esteso, anziché alla superficie a $x = 0$, all'intera piastra:

$$q''_{conv} = h\big(T(0)-T_\infty\big) = \int_0^L \dot{q}_g\,dx = \dot{q}_0\int_0^L\left(1-\frac{x}{L}\right)dx = \frac{\dot{q}_0\,L}{2}$$

da cui

$$T(0) = T_\infty + \frac{\dot{q}_0 L}{2h}$$