Esame di Analisi matematica I : esercizi
A.a. 2018-2019, sessione estiva, terzo appello

COGNOME ______________________ **NOME** ______________________

N. Matricola ______________________ **Anno di corso** ______________________

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Si calcoli $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\log(1-x^{-a})+\sin(x^{-a})}{\sin(x^{-2})+\int_x^{x^2}(te^{-[t]}+[t]^{-2})dt}$ al variare di $a \in (0,\infty)$.

$$\text{denomin} = x^{-2}+o(x^{-2}) + \underbrace{\int_x^{x^2} t^{-2}}_{(x^{-1}-x^{-2})} + \int_x^{x^2}\left([t]^{-2}-t^{-2}\right)dt + \int_x^{x^2} te^{-[t]}$$

$$0<\int_x^{x^2} te^{-[t]} \le \int_x^{x^2} t\,e^{-(t-1)}dt = e\int_x^{x^2} te^{-t} \le e\int_x^{\infty} e^{-\frac{t}{2}} = 2e^{-\frac{x}{2}+1} =$$
$$= o(x^{-n})\ \forall n$$

$$0<\int_x^{x^2}\left([t]^{-2}-t^{-2}\right)dt = \int_x^{x^2}\left(\frac{1}{(t+([t]-t))^2}-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$= \int_x^{x^2}\frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{\left(1+\frac{[t]-t}{t}\right)^2}-\frac{1}{t^2}\right) = \int_x^{x^2}\frac{1}{t^2}\left(2\,\frac{t-[t]}{t}+o\left(\frac{1}{t}\right)\right)dt$$

$$\le \int_x^{x^2}\frac{3}{t^3}\,dt = o(x^{-1}).$$

Pertanto $\text{denomin} = x^{-1}(1+o(1))$

$$\text{Numer} = -x^{-a} - \frac{x^{-2a}}{2} + o(x^{-2a}) + x^{-a} - \frac{x^{-3a}}{3} + o(x^{-3a}) =$$
$$= -\frac{x^{-2a}}{2}(1+o(1))$$

Pertanto abbiamo $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x^{-2a+1} = \begin{cases} \infty & \text{per } 0<a<\frac{1}{2} \\ 0 & \text{per } a>\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \text{per } a=\frac{1}{2} \end{cases}$

ESERCIZIO N. 2. Risolvere la disuguaglianza $Re\left(\dfrac{z^3}{1+z}\right) > 0$ individuando le soluzioni anche con un disegno.

$$Re\left(\frac{z^3}{1+z}\right) = \frac{Re\left(z^3(1+\bar z)\right)}{|1+z|^2} > 0$$

$$\Longleftrightarrow\ Re\left(z^3(1+\bar z)\right) = Re\left(z^3 + z^2|z|^2\right) =$$

$$= x^3 - 3x^2y + (x^2-y^2)(x^2+y^2) =$$

$$= x^3 - 3x^2y + x^4 - y^4 > 0$$

Qui ho dato l'esercizio per errore, nel senso che non è facile risolvere rispetto alle variabili e disegnare l'insieme delle soluzioni

COGNOME e NOME ______________________________ **N. Matricola** ______________

ESERCIZIO N. 3. Si ponga

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{t}{t^2+t+1}dt & \text{se } x \geq 0, \\ \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2-5t+4} & \text{se } x \leq 0. \end{cases}$$

Si determinino:

- $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)$;

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ perchè essendo $\lim_{t\to+\infty} \dfrac{\frac{t}{t^2+t+1}}{\frac{1}{t}} = 1$ per confronto asintotico $\frac{t}{t^2+t+1}$ non è in $L([0,+\infty))$; per aut-aut limite $=+\infty$

$\frac{1}{t^2-5t+4} = \frac{1}{(t-4)(t-1)} = \frac{A}{t-4} + \frac{B}{t-1}$ $\quad A = \frac{1}{t-1}\Big|_{t=4} = +\frac{1}{3}$ e $B = -\frac{1}{3}$ (integrabilità implica $A+B=0$)

$\int_0^x \frac{1}{t^2-5t+4} = \frac{1}{3}\lg\left(\frac{|x-4|}{|x-1|}\right) - \frac{1}{3}\lg 4 \xrightarrow{x\to-\infty} -\frac{1}{3}\lg 4 = -\lg 2^{\frac{2}{3}}$

- si calcoli la derivata $f'(x)$ dove e' definita, altrimenti si calcolino $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$;

per $x>0$ $\quad f'(x) = \frac{x}{x^2+x+1}$ $\qquad f'_d(0) = \lim_{x\to0^+}\frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to0^+} f'(x) = 0$

per $x<0$ $\quad f'(x) = \frac{1}{x^2-5x+4}$ $\qquad f'_s(0) = \lim_{x\to0^-}\frac{f(x)}{x} \overset{\text{Hopital}}{=} \lim_{x\to0^-} f'(x) = \frac{1}{4}$

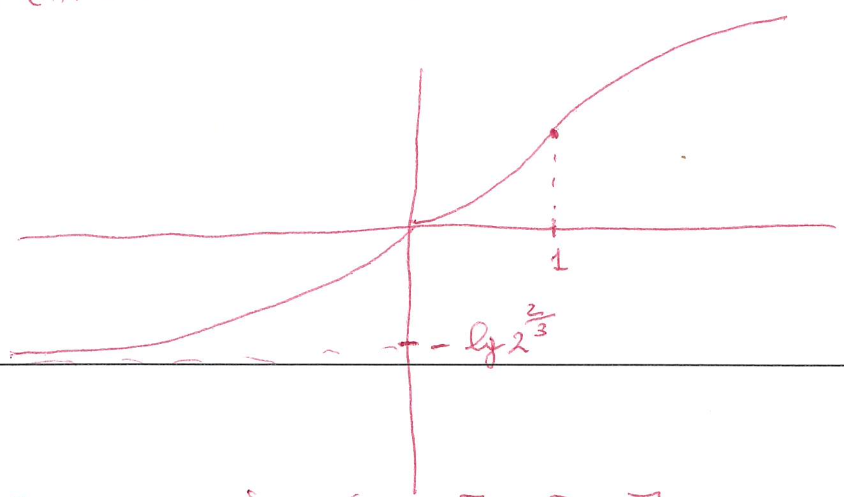
- si calcoli $f''(x)$ dove e' definita;

per $x>0$ $\quad f''(x) = \frac{x^2+x+1-x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{-x^2+1}{(x^2+x+1)^2}$

per $x<0$ $\quad f''(x) = -\frac{2x-5}{(x^2-5x+4)^2} < 0$. Nota che $f''(0)$ non esiste perchè $f'(0)$ non esiste

- si determini dove $f(x)$ e' crescente, decrescente, concava , convessa, e si tracci il grafico.

$f'(x) > 0 \quad \forall\ x \neq 0 \Rightarrow f$ è strettamente crescente



convessa in $(-\infty, 0]$, $[0, 1]$; concava in $[1, +\infty)$

ESERCIZIO N. 4.

(i) Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 3, $p_3(x)$, della funzione $f(x) = \sqrt{1+x+x^2}$.

Ricordare $(1+y)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}y + \binom{\frac{1}{2}}{2}y^2 + \binom{\frac{1}{2}}{3}y^3 + o(y^3)$. Sostituendo $y = x+x^2$, $f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(x^2+2x^3+x^4) + \binom{\frac{1}{2}}{3}(x+x^2)^3 + o(x^3)$ dove uso $o((x+x^2)^3) = o(x^3)$. Usando $(x+x^2)^3 = x^3 + o(x^3)$ ottengo

$$f(x) = 1 + \frac{1}{2}(x+x^2) + \binom{\frac{1}{2}}{2}(x^2+2x^3) + \binom{\frac{1}{2}}{3}x^3 + o(x^3)$$

$$= \underbrace{1 + \frac{1}{2}x + x^2\overbrace{\left(\frac{1}{2} + \binom{\frac{1}{2}}{2}\right)}^{3/8} + x^3\overbrace{\left(2\binom{\frac{1}{2}}{2} + \binom{\frac{1}{2}}{3}\right)}^{-3/16}}_{p_3(x)} + o(x^3)$$

(ii) Si approssimi $\int_0^1 e^{x+x^2}dx$ con un numero razionale, con un errore $< \frac{1}{100}$.

Conviene considerare $e^y = \sum_{j=0}^{n} \frac{y^j}{j!} + E_n(y)$ dove per $y > 0$

$$|E_n(y)| \le \frac{e^y}{(n+1)!}y^{n+1}.$$

Sostituendo $y = x+x^2$

$$\int_0^1 e^{x+x^2}dx = \underbrace{\sum_{j=0}^{n}\int_0^1 \frac{(x+x^2)^j}{j!}dx}_{\in \mathbb{Q}} + \int_0^1 E_n(x+x^2)dx$$

$$\left|\int_0^1 E_n(x+x^2)dx\right| \le \int_0^1 \frac{e^{x+x^2}(x+x^2)^{n+1}}{(n+1)!} \le$$

$$\le e^2\, 2^{n+1}\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{e^2\, 2^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{9\cdot 2^{n+1}}{(n+2)!} < \frac{1}{100}$$

$(n+2)! > 900 \cdot 2^{n+1}$. Bisognerebbe poi calcolare vari valori di n scegliendo il minimo per il quale la disuguaglianza è vera; senza calcolatrice non è agevole.

Quindi basta la risposta indicata