ANCOMP 3/3/19

1) $u(z) = \cos 2x \cosh 2y + \sinh x \cos y$

calcolando u_{xx} e u_{yy} si verifica che u è armonica su $\mathbb{C}$, quindi dotata di armonica coniugata v. Per C.R.:

$$v_x = -u_y = -(2\cos 2x \sinh 2y - \sinh x \sin y)$$

$$v_y = u_x = -2\sin 2x \cosh 2y + \cosh x \cos y$$

Integrando v_x risp. a x

$$v = -\sin 2x \sinh 2y + \cosh x \sin y + g(y)$$

derivando risp. a y si ricava

$$g \equiv \text{cost.}$$

$$v(z) = -\sin 2x \sinh 2y + \cosh x \sin y + \text{cost.}$$

2) Sia

$$D = \left\{ z \in \mathbb{C} \;\middle|\; \frac{1}{2} < |z| < 1 + \frac{1}{90} \right\}$$

D è una corona circolare delimitata dalle circonferenze

$$\gamma_1 = \left\{ |z| = \frac{1}{2} \right\}$$

$$\gamma_2 = \left\{ |z| = 1 + \frac{1}{90} \right\}$$

Ponendo $g(z) = z^{100} + 1$, g ha 100 zeri sulla circonf.

$$\{ |z| = 1 \} \subset D$$

$$f(z) - g(z) = z$$

Su γ_1 : $|f - g| = \frac{1}{2}$

mentre

$$|g(z)| = |z^{100} + 1| \geq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100} > \frac{1}{2} = |f - g|$$

Su γ_2 : $|f-g| = 1 + \frac{1}{90}$

$$|g(z)| \geq \left|1+\frac{1}{90}\right|^{100} - 1 > 1 + \frac{100}{90} - 1 =$$

$$= \frac{100}{90} = \frac{99}{90} + \frac{1}{90} > 1 + \frac{1}{90} = |f-g|$$

Quindi su ∂D : $|f-g| < |g|$

Per Rouché, f ha 100 zeri in D, se contati con le molteplicità.

3) γ è un ellisse centrata in 0 con semiasse orizz. lungo 2 e semiasse verticale lungo $\frac{1}{2}$.

$f(z) = \frac{1}{z^4-1}$ ha poli in $1, -1, i, -i$.

Solo 1 e -1 sono interni a γ

Q2 d. ii.

$$\int_\gamma \frac{1}{z^4-1}\,dz = 2\pi i\left(\operatorname{Res}(f,1) + \operatorname{Res}(f,-1)\right)$$

$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4\,1^3} + \frac{1}{4(-1)^3}\right) = 0.$$