IAGA 3/9/19

1) $T(x,y) = (x-2y, x+3y)$ è una trasf. lineare di $\mathbb{R}^2$ in sé, invertibile.

T trasporta insiemi misurabili in insiemi misurabili. Quindi se $G = G(u,v)$ è una funzione misurabile

$$F(x,y) = G \circ T(x,y) \quad \text{è anch'essa mis.}$$

Sia

$$G(u,v) = f(u)\, g(v)$$

$$F(x,y) = f(x-2y)\, g(x+3y)$$

Proviamo che F è integrabile e calc. l'int.

Consid. per il momento $|F(x,y)|$.

Per Tonelli,

$$\int_{\mathbb{R}^2} |F(x,y)|\, d\mu(x,y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_{\mathbb{R}} |f(x-2y)|\,|g(x+3y)|\, d\mu(x) =$$

La traslazione $x \to z = x-2y$ conserva la misura, quindi

$$= \int_{\mathbb{R}} d\mu(y) \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\,|g(z+5y)|\, d\mu(z) =$$

applicando di nuovo Tonelli,

$$= \int_{\mathbb{R}} d\mu(z) \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\,|g(z+5y)|\, d\mu(y) =$$

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\, d\mu(z) \int_{\mathbb{R}} |g(z+5y)|\, d\mu(y) =$$

cambiando variabile $w = z+5y$ si opera una traslaz. e una dilatazione quindi

$$= \int_{\mathbb{R}} |f(z)|\, d\mu(z) \int_{\mathbb{R}} |g(w)|\, \frac{d\mu(w)}{5} < \infty$$

Quindi F è integrabile. Ripetendo gli stessi passaggi senza valori ass. si ottiene

$$\int F(x,y)\, d\mu(x,y) = \frac{1}{5}\int f(z)\, dz \int g(w)\, dw = \frac{1}{5}.$$

2) Sappiamo che per ogni $E \subset \mathbb{R}^n$, $\forall \varepsilon > 0$ esiste A aperto t.c. $E \subset A$ e

$$\mu^*(A) \leq \mu^*(E) + \varepsilon .$$

Quindi

$$\inf \{ \mu^*(A) \,|\, A \text{ aperto}, A \supset E \} \leq \mu^*(E)$$

D'altra parte $\mu^*(E) \leq \mu^*(A)$, $\forall A \supset E$

per cui vale l'uguaglianza.

Se $E \subset \mathcal{L}$ sappiamo che $\forall \varepsilon > 0$ $\exists A$ aperto, $A \supset E$ t.c.

$$\mu^*(A \setminus E) < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \inf \{ \mu^*(A \setminus E) \mid A \text{ aperto} \supset E \} = 0$$

Viceversa, $\forall k$ sia A_k aperto $\supset E$ t.c.

$$\mu^*(A_k \setminus E) < \frac{1}{k}$$

Sia $B = \bigcap_k A_k \in \mathcal{B}$, $B \supset E$

$$\mu^*(B \setminus E) = 0$$

$$\Rightarrow \quad E = B \setminus (B \setminus E) \in \mathcal{L}. \qquad \square$$

3) $\forall \varepsilon > 0$ si consid l'insieme

$$E_n = \{ |F(f_n) - F(f)| > \varepsilon \}$$

Si ha

$$E_n \subset \{ \sqrt{|f_n - f|} > \varepsilon \} =$$

$$= \{ |f_n - f| > \varepsilon^2 \}$$

Quindi

$$\mu(E_n) \leq \mu(\{ |f_n - f| > \varepsilon \}) \longrightarrow 0$$

per $n \to \infty$. $\square$