Esame di Analisi matematica I : esercizi

A.a. 2018-2019, sessione autunnale, appello unico

COGNOME ______ **NOME** ______

N. Matricola ______ **Anno di corso** ______

Corso di S. CUCCAGNA

ESERCIZIO N. 1. Sia $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la funzione $f(x) = (x + x^3)e^{x^2}$.

(*i*) Dimostrare che $f(x)$ e' una mappa biettiva di $\mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$.

Abbiamo $f'(x) = (1+3x^2+2x(x+x^3))e^{x^2} = (1+5x^2+2x^4)e^{x^2} \geq 1$ $\forall x \Rightarrow f$ strettamente crescente $\Rightarrow$ ~~...~~ f iniettiva.

$\lim_{x\to+\infty} f(x) = (+\infty)(+\infty) = +\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = (-\infty)\cdot(+\infty) = -\infty$ e, siccome $f \in C^0(\mathbb{R})$ $\Rightarrow f$ suriettiva. Pertanto f biettiva

(*ii*) Sia $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la mappa inversa di f. Verificare che g e' una funzione dispari.

$f(-x) = (-x-x^3)e^{x^2} = -f(x) \Rightarrow f$ dispari. Ci chiediamo se ~~$\forall y \in \mathbb{R}$~~ $g(-y) = -g(y)$ $\forall y \in \mathbb{R}$. Sia $y \in \mathbb{R}$ qualsiasi e sappiamo che esiste ed è unico $x \in \mathbb{R}$ t.c. $y = f(x)$. Allora $g(y) = x$ per definizione di g. Notare che $-y = -f(x) = f(-x)$, perche' f e' dispari. Allora $g(-y) = -x$, per definizione di g. Confrontando $g(-y) = -x = -g(y)$.

(*iii*) Determinare per quali $p \in \mathbb{R}$ si ha $g(x) = o(\log^p(x))$ per $x \to +\infty$.

Notare che $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{y\to+\infty} \frac{g(y)}{\lg^p(y)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{g(f(x))}{\lg^p((x+x^3)e^{x^2})} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\lg(x+x^3) + \lg(e^{x^2}))^p} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{(\lg(x+x^3) + x^2)^p} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^{2p}} = \begin{cases} 0 & \text{per } 2p > 1 \\ 1 & \text{per } 2p = 1 \\ +\infty & \text{per } 2p < 1 \end{cases}$$

Quindi $g(y) = o(\lg^p(y))$ per $p > \frac{1}{2}$

ESERCIZIO N. 2. Determinare l'insieme $E = \{z \in \mathbb{C} : Im\left(\frac{z}{1+z+z^2}\right) > 0\}$ tracciandolo inoltre nel piano.

$$\frac{z}{1+z+z^2} = \frac{z(1+\bar{z}+\bar{z}^2)}{|1+z+z^2|^2} = \frac{z+|z|^2+|z|^2\bar{z}}{|1+z+z^2|^2}$$

Allora, per $z = x+iy$

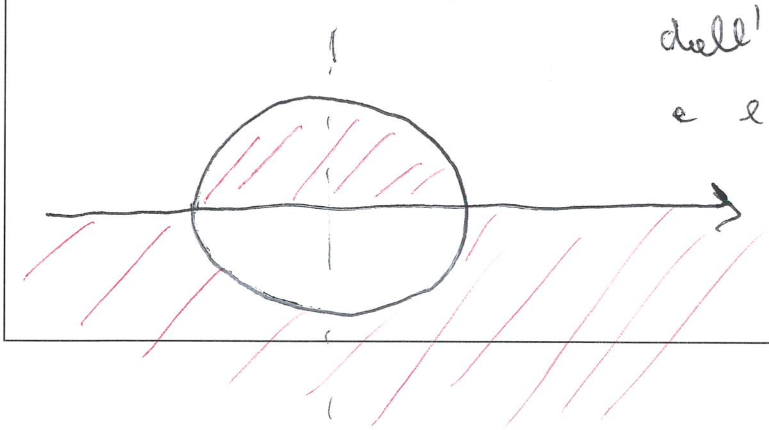
$$Im\left(\frac{z}{1+z+z^2}\right) = \frac{1}{|1+z+z^2|^2} Im\left(z+|z|^2+|z|^2\bar{z}\right) =$$

$$= \frac{1}{|1+z+z^2|^2} Im\left(z+|z|^2\bar{z}\right) = \frac{1}{|1+z+z^2|^2} Im\left(x+iy+(x^2+y^2)(x-iy)\right)$$

$$= \frac{1}{|1+z+z^2|^2}\left(y-y(x^2+y^2)\right) > 0$$

cioè $y\left(1-(x^2+y^2)\right) > 0$

L'insieme dove $y(1-x^2-y^2)=0$ e dato da dell'insieme evidenziato in nero e l'insieme dove $y(1-x^2-y^2)>0$ è l'insieme evidenziato in rosso



COGNOME e NOME ______________________ **N. Matricola** __________

ESERCIZIO N. 3. Per $[x] : \mathbb{R} \to \mathbb{Z}$ con $[x] \le x < [x] + 1$ la parte intera di x e per

$$f(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^x \frac{1}{t^2 + 3t + 2} dt & \text{se } x \ge 0, \\ \displaystyle\int_0^x e^{[3t+1]} dt & \text{se } x \le 0, \end{cases}$$

si determinino:

- $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)$;

$\frac{1}{(t+1)(t+2)} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{t+2}$ $A = \frac{1}{t+2}\Big|_{t=-1} = 1 \Rightarrow B = -1$

Per $x \ge 0$ $f(x) = \int_0^x \frac{1}{t+1} - \int_0^x \frac{1}{t+2} = \lg \frac{t+1}{t+2}\Big]_0^x \xrightarrow{x\to+\infty} \lg 2$

Per $x < 0$ $\int_0^x e^{[3t+1]} dt =$ pn $3t+1 = s$

$= \int_1^{3x+1} e^{[s]} \frac{ds}{3}$ e per $x \to -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\int_1^0 e^{[s]} \frac{ds}{3} + \lim_{n\to+\infty} \sum_{j=1}^{n} \int_{-j}^{-(j-1)} e^{[s]} ds$

- si calcoli la derivata $f'(x)$ dove e' definita, altrimenti si calcolino $f'_d(x)$ e $f'_s(x)$;

$= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3} + \sum_{j=1}^{n} e^{-j}\right) = \frac{1}{3} + 1 + \frac{-1}{1-\frac{1}{e}}$

$f'(x) = \frac{1}{x^2+3x+2}$ per $x > 0$

per $x < 0$ $f'(x) = e^{[3x+1]}$ per $3x+1 \notin \mathbb{Z}$ $f'_d(0) = \frac{1}{2}$ $f'_s(0) = 1$

e nei punti $x < 0$ con $3x+1 \in \mathbb{Z}$

- si calcoli $f''(x)$ dove e' definita;

Per $x > 0$ $f''(x) = -\frac{(2x+3)}{(x^2+3x+2)^2}$ $f'_d(x) = e^{[3x+1]}$, $f'_s(x) = e^{[3x]}$

Per $x < 0$, dove definito $f''(x) = 0$, cioè se $x < 0$ con $3x+1 \notin \mathbb{Z}$

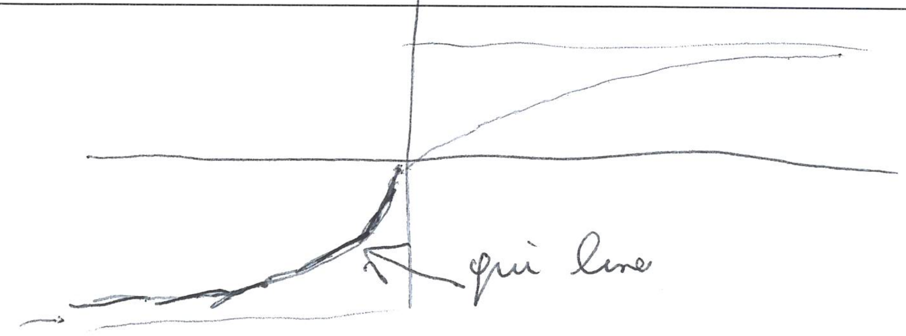
- si determini dove $f(x)$ e' crescente, decrescente, concava , convessa, e si tracci il grafico.

$f(x)$ è strettamente crescente concava per $x > 0$ (da $f''(x) < 0 \ \forall x > 0$)

e convessa in $x < 0$ (perchè ~~da~~ $f'(x) = e^{[3x+1]}$ è crescente

dove è definita, per $x < 0$ $f(x)$ è lineare a tratti sempre

più orizzontale, spostandosi verso sinistra)



ESERCIZIO N. 4.

(i) Si calcoli il polinomio di McLaurin di ordine 3, $p_3(x)$, della funzione $f(x) = \tan(e^x)$.

$$f(x) = tg(e^x - 1 + 1) = tg(1) + tg'(1)(e^x-1) + \frac{tg''(1)}{2}(e^x-1)^2 + \frac{tg^{(3)}(1)}{6}(e^x-1)^3 + o((e^x-1)^3)$$

Da $e^x - 1 = x + o(x)$ segue $o((e^x-1)^3) = o(x^3)$. Poi sostituire

$$e^x - 1 = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$$

$$(e^x-1)^2 = \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^2 + o(x^3) = x^2 + x^3 + o(x^3)$$

$$(e^x-1)^3 = x^3 + o(x^3)$$

$$f(x) = tg(1) + tg'(1)\left(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{tg''(1)}{2}(x^2 + x^3) + \frac{tg^{(3)}(1)}{6}x^3 + o(x^3)$$

$tg'(1) = 1 + tg^2(1)$ $\qquad tg''(1) = 2\, tg 1 \,(1 + tg^2(1))$

(ii) Si approssimi $\int_0^1 e^{-x^2 - e^x \log(100)} dx$ con un numero razionale, con un errore $< \frac{1}{100}$.

$$tg^{(3)}(1) = 2(1 + 4\, tg^2(1) + 3\, tg^4(1))$$

(ii) Noto per $0 < x \leq 1$ $\quad e^{-x^2 - e^x lg(100)} \leq e^{-e^x lg(100)} <$

$$< e^{-lg 100} = \frac{1}{100}$$

Ma allora $\int_0^1 e^{-x^2 - e^x lg(100)} < \int_0^1 \frac{1}{100}\, dx = \frac{1}{100}$

Posso approssimare l'integrale con 0.