CORSO DI GEOMETRIA
PROGRAMMA
A.A. 2019/2020
PROF. VALENTINA BEORCHIA

Vettori applicati nel piano e nello spazio reale. Somma e di prodotto per scalari. Propriet à delle operazioni. Relazioni di equivalenza. Relazione di equipollenza tra vettori applicati. Vettori geometrici. Somma e di prodotto per scalari. Propriet à delle operazioni. Spazio vettoriale reale. Esempi di spazi vettoriali: vettori geometrici, $\mathbb{R}^n$, spazio delle funzioni reali, spazio dei polinomi reali in una indeterminata, spazio delle successioni reali.

Definizione di campo ed esempi: campo dei numeri razionali $\mathbb{Q}$, campo dei numeri reali $\mathbb{R}$, campo dei numeri complessi $\mathbb{C}$, campi finiti $\mathbb{Z}_2$ e $\mathbb{Z}_3$. Relazione di congruenza modulo n. L'insieme $\mathbb{Z}_4$ non è un campo.

Matrice a coefficienti in un campo. Somma e prodotto per scalari tra matrici. L'insieme delle matrici con m righe e n colonne è uno spazio vettoriale. Matrice trasposta. La trasposta preserva la somma ed il prodotto per scalari. Definizione di matrice diagonale, simmetrica, e matrice unità.

Prodotto righe per colonne tra matrici e sue proprietà. Matrice invertibile e di matrice inversa.

Definizione e prime proprietà di sistema di equazioni lineari. Esempio: PageRank, matrice di adiacenza e sistema lineare associato. Matrice dei coefficienti e matrice completa associate ad un sistema di equazioni lineari. Teorema di struttura per le soluzioni di sistemi di equazioni lineari con dimostrazione. Matrici a scala. Criterio di compatibilità per sistemi lineari con matrice dei coefficienti a scala con dimostrazione. Sistemi lineari equivalenti. Operazioni elementari. Proposizione: le operazioni elementari trasformano un sistema lineare in uno equivalente, dimostrazione. Teorema di Eliminazione di Gauss (Riduzione a scala) con dimostrazione.

Matrice nilpotente. Una matrice nilpotente non è invertibile. Matrice unipotente. Una matrice unipotente è invertibile. Matrici diagonali invertibili. Sistemi lineari omogenei con un numero di incognite maggiore del numero di equazioni ammettono almeno una soluzione non banale.

Combinazione lineare di vettori. Span di un numero finito di vettori. Lo Span è un sottospazio vettoriale. di insieme (o sistema) di generatori per uno spazio vettoriale. Spazi vettoriali finitamente generati. di vettori linearmente dipendenti. Esempi: un vettore è linearmente dipendente se e solo se è il vettore nullo. Due vettori sono linearmente dipendenti se e solo se sono proporzionali. Esempi di tre vettori linearmente dipendenti. Vettori linearmente indipendenti e dipendenti. Proposizione: s vettori sono linearmente dipendenti se e solo e uno di loro si può esprimere come combinazione lineare dei rimanenti. Dimostrazione. Base di uno spazio vettoriale.

Teorema: in uno spazio vettoriale finitamente generato n vettori formano una base se e solo se ogni vettore si può scrivere in modo unico come combinazione lineare degli n vettori fissati. Dimostrazione. Coordinate di un vettore rispetto a una data base. Base canonica in $\mathbb{K}^n$. Proposizione: da un insieme di generatori si può sempre estrarre una base. Dimostrazione.

Proposizione: ogni spazio vettoriale non banale finitamente generato ha una base, dimostrazione. Proposizione del completamento: ogni insieme di vettori linearmente indipendenti è contenuto in una base. Dimostrazione. Teorema: due basi di uno spazio vettoriale finitamente generato hanno lo stesso numero di elementi; dimostrazione. di dimensione di uno spazio vettoriale finitamente generato. Proprietà della dimensione. Sottospazi vettoriali e dimensione. Formula di Grassmann con dimostrazione.

Rango di una matrice. Prime proprietà. Metodo per il calcolo del rango utilizzando la riduzione a scala tramite le operazioni elementari. Teorema: il rango di una matrice è uguale al rango della sua trasposta. Il teorema di Rouch-Capelli con dimostrazione. Teorema: una matrice quadrata è invertibile se e solo se ha rango massimo; dimostrazione. Applicazioni al calcolo della matrice inversa.

Minore di una matrice quadrata. Determinante di una matrice quadrata come sviluppo di Laplace lungo la prima colonna. Interpretazione geometrica del determinante di una matrice di ordine 2 come l'area del parallelogramma generato dalle colonne. Proprietà fondamentali del determinante ed unicità del determinante. Enunciato della proposizione che permette di calcolare il determinante per mezzo delle operazioni elementari. Teorema: una matrice quadrata ha rango massimo se e solo se il suo determinante è non nullo. Applicazioni al calcolo del rango di una matrice qualsiasi. Sviluppo di Laplace per colonne. Sviluppo di Laplace del determinante lungo le righe. Formula di Binet (enunciato). Corollario: se una matrice è invertibile, il determinante della sua inversa è l'inverso del suo determinante. Teorema: il determinante della trasposta di una matrice coincide con il determinante della matrice stessa. Matrice dei cofattori. Calcolo dell'inversa per mezzo della matrice dei cofattori. Regola di Cramer con dimostrazione.

Spazio affine. Proprietà ed esempi. Dimensione di uno spazio affine. Riferimento affine e di coordinate. Sottospazio affine e di giacitura. Teorema: l'insieme delle soluzioni un sistema lineare compatibile è un sottospazio affine: dimostrazione. di equazioni cartesiane e di equazioni parametriche per un sottospazio affine. Passaggio da equazioni cartesiane a parametriche e viceversa. Sottospazi paralleli, sghembi, ed incidenti.

Geometria del piano affine Equazioni cartesiane e parametriche delle rette nel piano. Condizioni di parallelismo ed incidenza. Esempi. Fasci propri ed impropri di rette.

Geometria dello spazio affine 3-dimensionale Equazioni parametriche e cartesiane di piani e rette. Condizioni di parallelismo e di incidenza. Fasci propri ed impropri di piani. Stelle di piani.

Applicazione e operatore lineare. Prime proprietà delle applicazioni lineari. Esempi: applicazioni lineari associate a matrici; l'identità; la funzione nulla; proiezioni. Il teorema di struttura per applicazioni lineari con dimostrazione. Nucleo ed immagine e loto proprietà.

Rango di una applicazione lineare. Il teorema della dimensione con dimostrazione. Applicazioni agli operatori lineari. Teorema: due spazi vettoriali sullo stesso campo di dimensione finita sono isomorfi se e solo se hanno la stessa dimensione; dimostrazione.

Matrice che rappresenta una applicazione lineare rispetto a due basi fissate. Espressione dell'immagine e del nucleo di una applicazione lineare mediante una matrice che la rappresenta. La matrice che rappresenta la composizione di due applicazioni lineari è il prodotto delle matrici che rappresentano le due applicazioni; dimostrazione. Matrice del cambiamento di base. Relazione tra due matrici che rappresentano la stessa applicazione lineare rispetto a due coppie di basi diverse. Matrici simili. Due matrici simili hanno lo stesso determinante. Determinante di un operatore.

Operatore diagonalizzabile e di matrice diagonalizzabile. Definizione di autovalore, di spettro e di autovettore. Prime proprietà degli autovalori e degli autovettori. Autospazio. Proprietà del polinomio caratteristico. Il numero degli autovalori di un endomorfismo è minore o uguale alla dimensione dello spazio.

Primo criterio di diagonalizzabilità: la somma delle dimensioni degli autospazi di un operatore è minore o uguale alla dimensione dello spazio; un operatore è diagonalizzabile se e solo se la somma delle dimensioni degli autospazi coincide con la dimensione dello spazio. Procedimento per diagonalizzare un endomorfismo.

Molteplicità algebrica e geometrica di un autovalore. Lemma: per ogni autovalore la molteplicit à algebrica è maggiore o uguale alla molteplicit à geometrica. Secondo criterio per la diagonalizzabilit à di un endomorfismo. Corollario: se un operatore ha $n = \dim(V)$ autovalori distinti, allora è diagonalizzabile.

Propriet à del prodotto scalare standard di $\mathbb{R}^n$. Norma di un vettore. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz ed angolo convesso tra due vettori di $\mathbb{R}^n$. Definizione di prodotto scalare su uno spazio vettoriale reale.

Base ortogonale e base ortonormale. Procedimento di Gram-Schmidt. Teorema: ogni spazio vettoriale euclideo di dimensione finita ha una base ortonormale.

Caratterizzazione delle isometrie come le applicazioni lineari che mandano basi ortonormali in basi ortonormali, rispettivamente che preservano la norma dei vettori. Proposizione: un endomorfismo è una isometria, se e solo se la matrice che lo rappresenta, rispetto ad una base ortonormale, è ortogonale. Classificazione delle matrici ortogonali di ordine 2.

Operatore autoaggiunto. Matrici simmetriche. Ogni endomorfismo autoaggiunto ha almeno un autovalore reale. Teorema Spettrale. Corollario: ogni matrice simmetrica a coefficienti reali è diagonalizzabile tramite una matrice ortogonale. Algoritmo per trovare una base ortonormale che diagonalizza un dato operatore.

Forme bilineari simmetriche.

Libro di testo consigliato:

Geometria analitica con elementi di algebra lineare. Marco Abate e Chiara de Fabritiis, Mc Graw Hill, 2015.

Approfondimenti: Algebra lineare e geometria, Enrico Schlesinger, Zanichelli, Seconda edizione

Geometria 1. Edoardo Sernesi, Bollati Boringhieri, 1989.