Pi greco:

una storia lunga cinque anni

Loredana Rossi

Il percorso

Per scoprire π ho scelto di ripercorrere alcune tappe tracciate dai matematici nel corso della storia con l'intento di:

- **esaminare** alcuni paradossi legati alla definizione stessa di π,
- **evidenziare** alcuni problemi centrali della storia della matematica, quali:
  - il problema della quadratura del cerchio
  - il problema isoperimetrico
- **presentare** diverse modalità attraverso cui è possibile approssimare π, nel corso di attività didattiche:
  - Il metodo di Archimede, il metodo descritto nel Papiro di Rhind,
  - alcune formule infinite (serie, prodotti)
  - le misure sperimentali (Ago di Buffon, Metodo di Montecarlo)

cercando di :

- fornirvi spunti didattici utili,
- algoritmi per l'approssimazione di π da mettere a confronto per valutare velocità di convergenza, complessità della procedura, da proporre nelle diverse annualità scolastiche,

partendo dalla mia esperienza in progetti laboratoriali gestiti in collaborazione con il Nucleo di Ricerca Didattica dell'Università di Trieste, progetti che in questi anni hanno coinvolto diversi studenti del «Galilei» di biennio e triennio, in particolare attraverso la partecipazione a :

- Progetti PLS: 2005-2007 2007-2009 "Metodi della matematica attraverso i tempi"
  - ✓ Proposizione XII,2 degli Elementi di Euclide (*I cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri*)
  - ✓ Proposizione XII,1 degli Elementi di Euclide (*Poligoni simili inscritti in cerchi stanno fra loro come i quadrati dei diametri*)
  - ✓ Indivisibili curvi di Torricelli per il calcolo dell'area del cerchio
- Progetto PLS: 2011 « π: una storia non ancora conclusa »
- Matematica dei ragazzi: 2010 «Vado al massimo, dando il minimo!»

Chi è π?

- in geometria euclidea:
  - Il rapporto fra circonferenza e diametro
  - Il rapporto fra cerchio e quadrato del raggio
- un numero irrazionale e trascendente definibile attraverso formule infinite
- L'ossessione dei cacciatori dei suoi decimali
- L'unico numero che viene festeggiato nel mondo
- Il numero irrazionale più conosciuto e famoso al mondo

π il numero delle meraviglie

- π è un numero irrazionale (Lambert 1761) e trascendente (von Lindemann 1882)
- Se ne conoscono 206 miliardi di decimali (se ad ogni cifra si fa corrispondere un secondo di musica, il brano durerebbe più di 6000 anni)
- Non si conosceranno mai più di 10^{77} decimali di π
- π è aleatorio (è presente la successione 7777777, 123456789, 999999, …)

Curiosità e paradossi

- Coloro che vogliono assolutamente risolvere la quadratura del cerchio soffrono del "*morbo ciclometrico*"
- Nel 1897 Edward Johnston Goodwin propose alla Camera degli Stati Uniti un testo di legge che fissava alcune formule che stabilivano contemporaneamente π=4, π=3,1604, π=3,2, π=3,232
- π è un'occasione veramente importante per ragionare su alcune misconcezioni legate al concetto di limite,

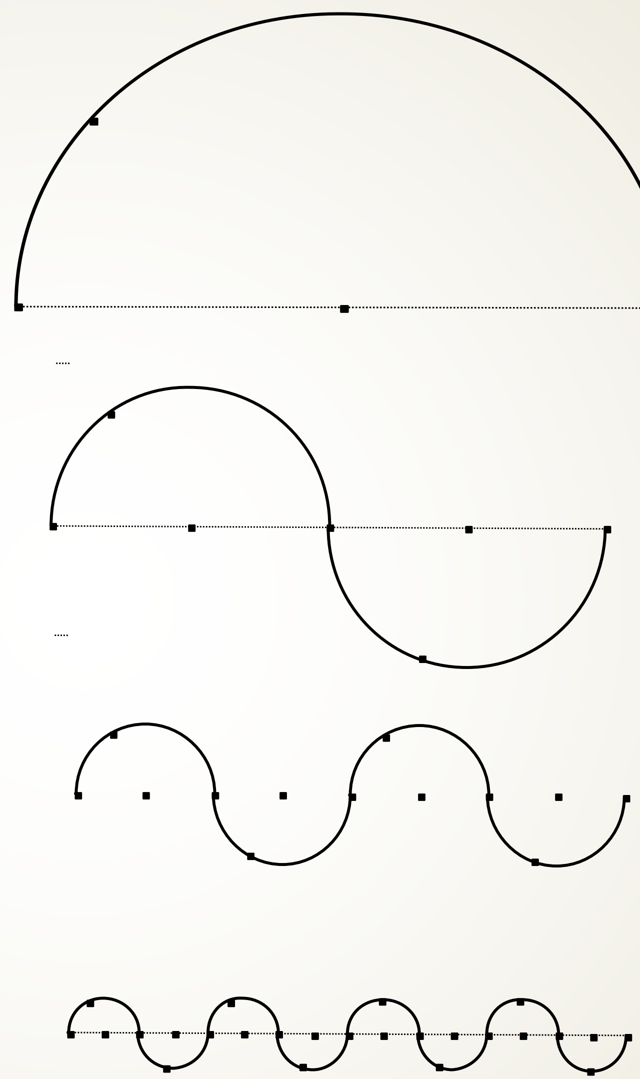
π=2 ?

1) Consideriamo una semicirconferenza di raggio 1 e diametro AB. La lunghezza dell'arco di questa semicirconferenza è π

2) Consideriamo ora due semicirconferenze di raggio 1/2, costruite come in figura. La lunghezza di questa nuova curva è sempre π, perché la prima semicirconferenza ha lunghezza $\pi/2$, come la seconda.

…

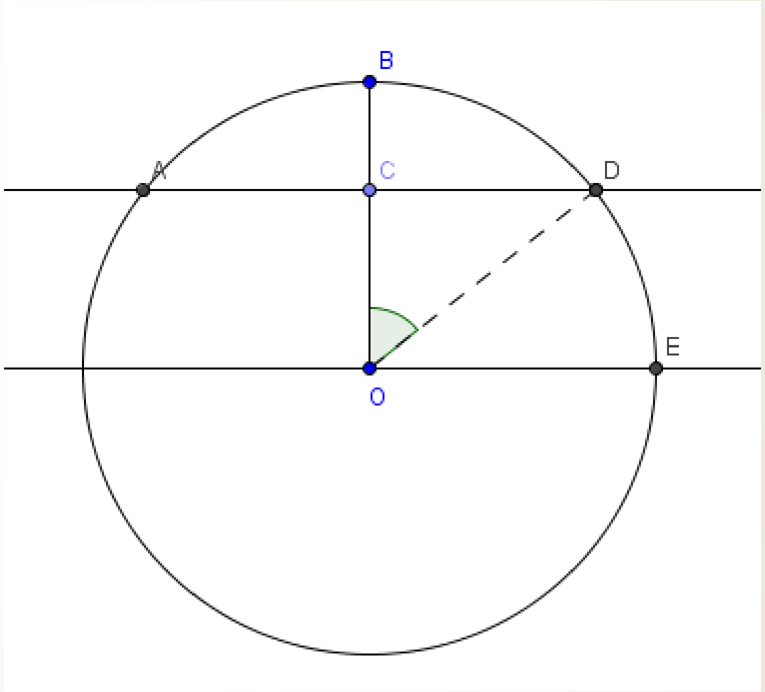
La curva limite di tutte queste curve è il segmento AB, diametro della prima semicirconferenza, di lunghezza 2. **Si conclude perciò che … π=2.**



Nella geometria della sfera,

il rapporto fra circonferenza e diametro è ...

- Nella geometria della sfera la superficie sferica rappresenta il « piano » di riferimento
- Esaminando la sfera in sezione, AD è l'arco-diametro della circonferenza e B è il suo centro
- La lunghezza della circonferenza è 2*CD*π= 2*20*sen(α)*π
- Il rapporto fra circonferenza e l'arco-diametro è $\frac{2 \cdot 20 \cdot \pi sen(\alpha)}{2 \cdot 20 \cdot \alpha} = \pi \frac{sen(\alpha)}{\alpha}$ quindi è sempre minore di π
- Solo al limite per α→0 vale π



Il problema della quadratura del cerchio

- *Dato un cerchio, il problema consiste nel disegnare un quadrato della stessa area. In questo problema, che gettò nella disperazione i geometri di 23 secoli, ci si impone di:*
  - *utilizzare solo una riga non graduata e un compasso*
  - *considerare solo un numero finito di passaggi intermedi*
- Anassagora (500 – 428 a. C.) che propose questo problema non riuscì a "quadrare il cerchio"

Gli strumenti per costruire

Si può quadrare il cerchio?

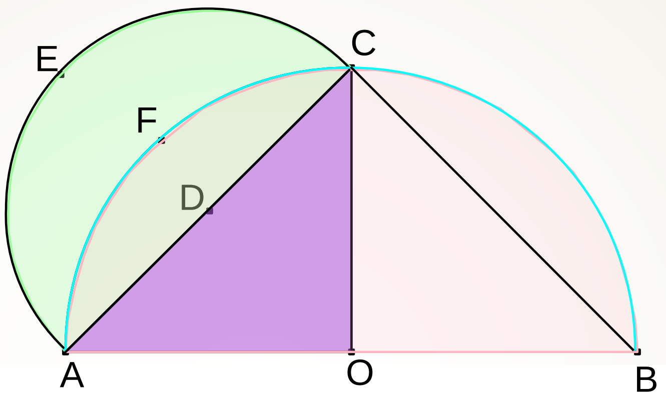
- **Antifone (sofista ateniese del V sec. a.C.)** propose di quadrare il cerchio costruendo poligoni aventi un numero di lati sempre più grande.
- L'idea di procedere in tale modo è dovuta ad **Eudosso di Cnido** (408-355 a.C.) si ispira infatti al *metodo di esaustione*.
- Antifone sostenne che, poiché si possono quadrare individualmente i poligoni della successione che ricoprono il cerchio, si può quadrare anche il cerchio. Ma non propose una dimostrazione ispirata al metodo di esaustione

Alcuni progressi:

- **Nel V secolo a.C., Ippocrate di Chio,** tentò di risolvere la quadratura del cerchio e sembrò far passi avanti. Egli riuscì infatti a quadrare diverse figure aventi i bordi composti da archi di cerchio note con il nome di *lunule*.

- Queste lunule affascinarono altri geometri, come Leonardo da Vinci che ne costruì più di cento.

La lunula di Ippocrate



Dim

1) per ipotesi $OC \perp AB$, $AC \cong BC$

2) $A\hat{C}B = 90°$ perché inscritto in una semicrf

3) Per il teorema di Pitagora generalizzato

$$semicerchio(AB) \doteq semicerchio(AC) + semicerchio(CB) \doteq 2semicerchio(AC)$$

4) $\frac{semicerchio(AC)}{semicerchio(AB)} = \frac{1}{2} \Rightarrow$

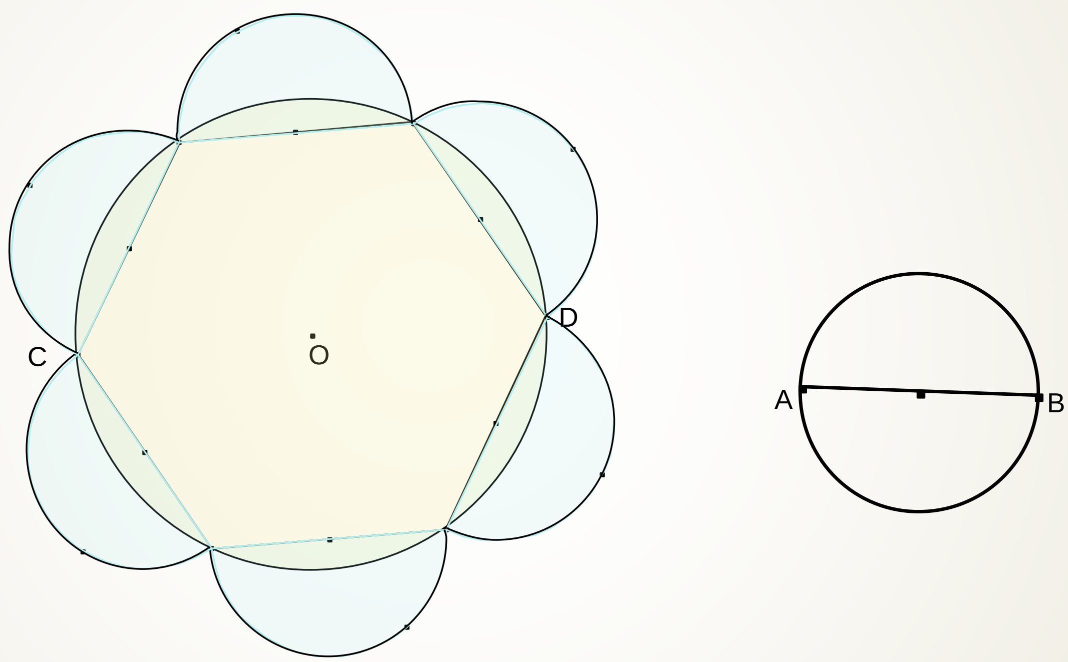
$$semicerchio(AC) \doteq \frac{semicerchio(AB)}{2} = A(quadrante\ AFCO)$$

5) $semicerchio(AC) \doteq lunula(AECF) + AFC,$

$quadrante\ AFCO \doteq \Delta ACO + AFC \Rightarrow \underline{lunula(AECF) \doteq \Delta\ ACO}$

Poiché $\Delta\ ACO$ è quadrabile allora la lunula è quadrabile.

La presunta **quadratura del cerchio** per mano di Ippocrate



La dimostrazione:

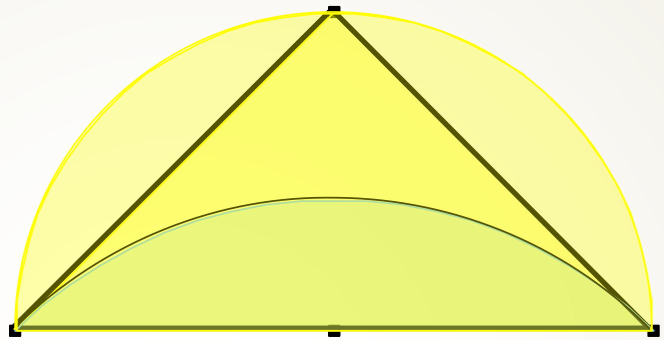
- *Osservazioni: - il lato dell'esagono = AB,*
- *raddoppiando il raggio l'area quadruplica*
- *Figura = esagono + 6 semicerchi(AB)=* ***esagono + 3 cerchi (AB)***
- *Oppure figura = cerchio(CD) + 6 lunule =* ***4 cerchi (AB) + 6 lunule***
- *$\Rightarrow$ esagono + 3 cerchi (AB) = 4 cerchi (AB) + 6 lunule*
- ***$\Rightarrow$ cerchio (AB) = esagono – 6 lunule***

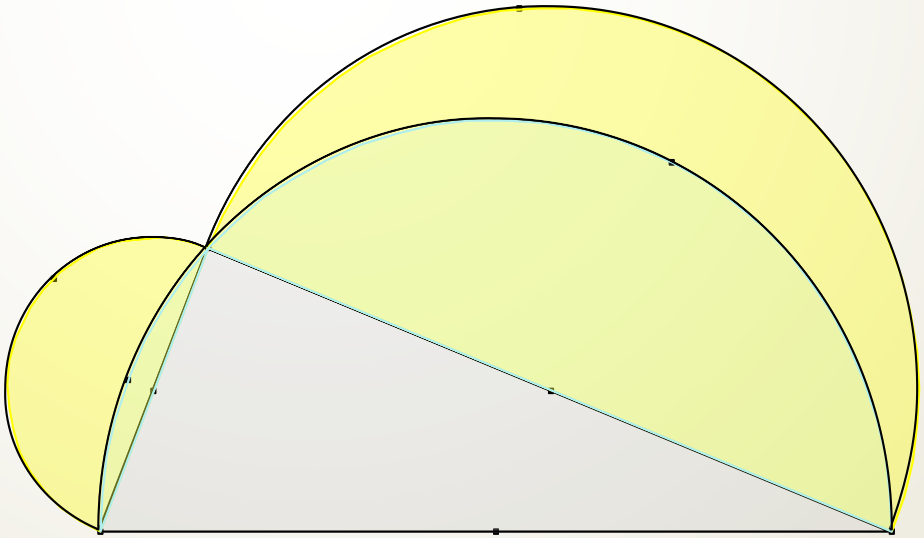
«essendo sia l'esagono, sia la lunula quadrabile anche il cerchio è quadrabile»

Conclusioni:

- la lunghezza di una curva limite non è il limite delle lunghezze
- se i poligoni inscritti in un cerchio sono quadrabili questo non ci assicura che lo sia anche il cerchio
- Ippocrate non riuscì a dimostrare che è possibile quadrare il cerchio
- non tutte le lunule sono quadrabili anzi solo pochissime lo sono

Alcune lunule quadrabili



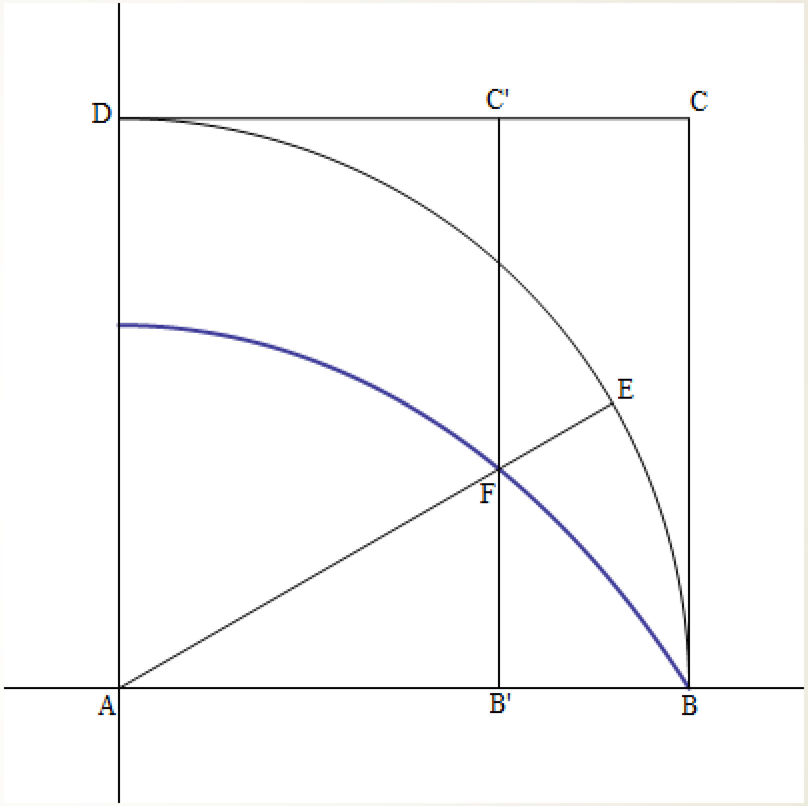


QUADRATRICE DI IPPIA

- Un tentativo interessante di quadratura del cerchio è di **IPPIA** di Elis (480 a.C.), un contemporaneo di Socrate che Platone cita in più punti. La quadratrice di Ippia è la prima curva documentata nella storia della matematica (oltre il cerchio e la retta). Ippia fu astronomo, matematico e sofista vissuto ad Atene nella seconda metà del V secolo a.C. Egli si servì della quadratrice per risolvere il problema della **trisezione dell´angolo** e per questo la curva è anche nota come trisettrice. Successivamente, intorno alla metà del IV secolo a.C., **Dinostrato**, si servì della curva per risolvere il problema della quadratura del cerchio, da cui il nome di quadratrice.

La curva, che Ippia costruì in modo meccanico

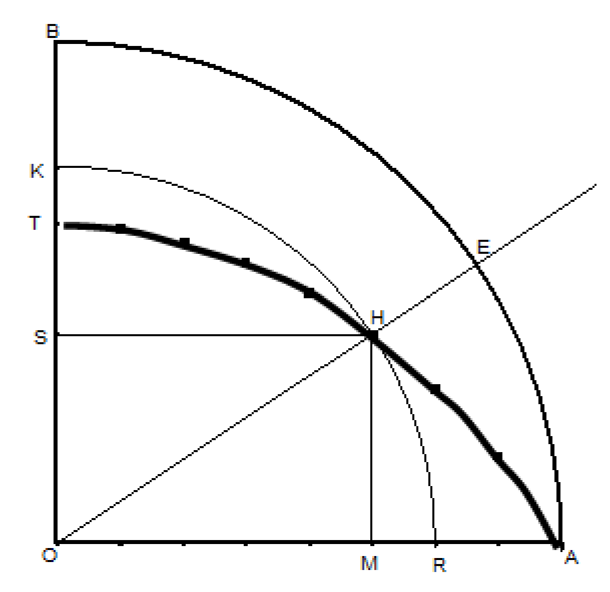
*Dato un quadrato ABCD si tracci con centro in A il quarto di circonferenza BED. Sia B'C' un segmento parallelo all´asse y che partendo dal segmento si muova a velocità costante verso il segmento AD. Sia ora AE il raggio della circonferenza che descriva uniformemente l´angolo BED da AB fino ad AD. Entrambi i movimenti del segmento e del raggio iniziano e finiscono simultaneamente. Il luogo dei punti F intersezione del raggio AE e del segmento B'C' è la **quadratrice di Ippia.***



Proprietà della quadratrice

il raggio è medio proporzionale tra l'arco di circonferenza e il segmento che congiunge il centro con il punto in cui la curva interseca il lato.

La dimostrazione con la doppia riduzione all'assurdo:



Tesi: $\widehat{AB}:OA = OA:OT$ ***(*).***

La dimostrazione è per assurdo (fornita da Pappo)

Supponiamo per assurdo che per un punto K con OK> OT valga la proporzione $\widehat{AB}:OA = OA:OK$ *(**).*

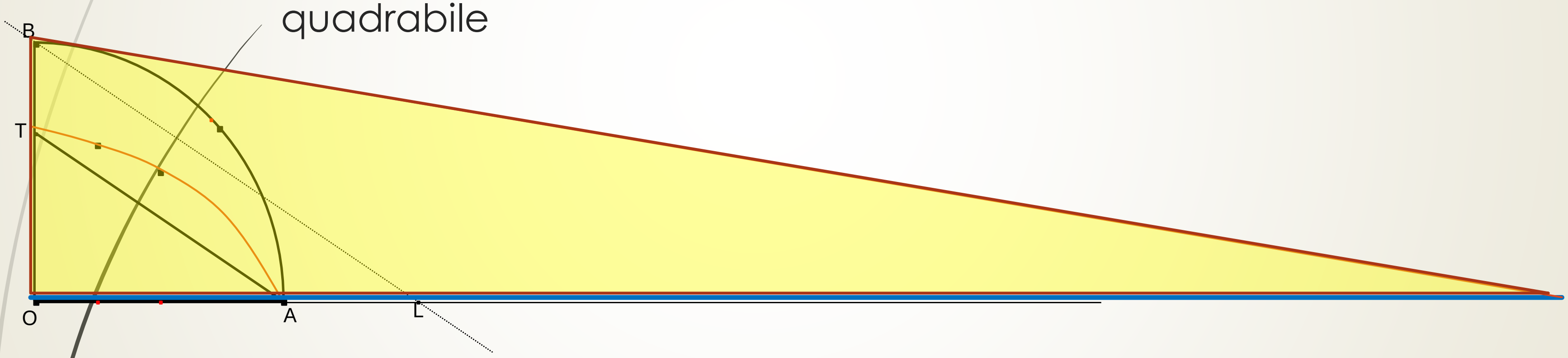
- *Individuiamo H intersezione della quadratrice con la circonferenza di raggio OK ed E intersezione tra* $\widehat{AB}$ *e il prolungamento di OH.*
- *Per la proporzionalità tra la circonferenza e i rispettivi diametri* $\Rightarrow OA:OK = \widehat{AB}:\widehat{RK}$*, da quanto ipotizzato* $\widehat{AB}:OA = OA:OK \Rightarrow \widehat{AB}:OA = \widehat{AB}:\widehat{RK} \Rightarrow OA \cong \widehat{RK}$
- *Per la proprietà della quadratrice* $\widehat{AB}:\widehat{EB} = OA:HS$
  ed essendo $\widehat{RK}:\widehat{HK} = \widehat{AB}:\widehat{EB}$ *(per la proporzionalità fra archi ed angoli al centro)*$\Rightarrow$ $\widehat{RK}:\widehat{HK} = AO:HS$
- *Essendo* $OA \cong \widehat{RK}$ *ed* $\widehat{RK}:\widehat{HK} = AO:HS \Rightarrow \widehat{HK} \cong HS$ *questo è assurdo.*
- *Analogamente si dimostra che la ipotesi (**) conduce all'assurdo nel caso OK<OT*

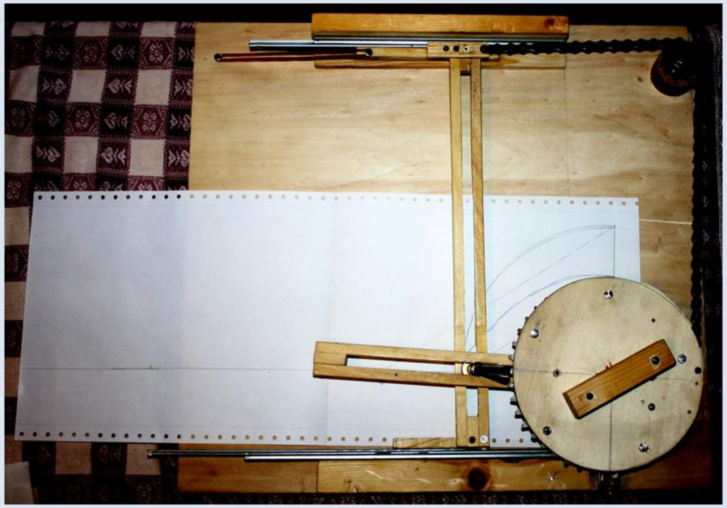
Dalla proprietà della quadratrice al triangolo equivalente al cerchio:

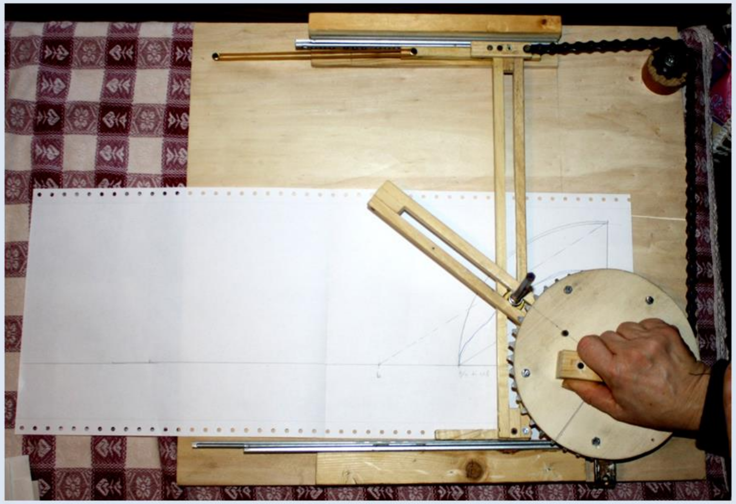
Si traccia da B la parallela ad AT per il Teorema di Talete e per la proprietà della QUADRATRICE

OL ha la lunghezza dell'arco AB

Il punto C sulla semiretta OA, ottenuto quadruplicando OL è un segmento che ha la lunghezza della circonferenza rettificata $\Rightarrow$ il triangolo OBC è equivalente al cerchio di raggio OA e OBC è quadrabile







La macchina quadratrice

In sintesi:

- Il problema, come posto da Anassagora, non ha soluzione, ciò è stato dimostrato da von Lindemann nel 1882 provando la trascendenza di π
- La questione della quadratura del cerchio ha stimolato una serie di tentativi spesso fantasiosi, ovviamente sbagliati
- Nel 1775 la Reale Accademia delle Scienze di Parigi si rifiuta di prendere in esame ulteriori tentativi di soluzione dei tre problemi della classicità

Il problema isoperimetrico

Il primo problema di massimo nella storia si deve ad un'antica leggenda narrata anche nel I Libro dell'Eneide. Nel lontano 800 a.C. Elissa o Elisa (a noi nota come Didone, l'errante), principessa di origine fenicia,dopo la morte del marito Sicheo, fugge per mare insieme alla sorella e a pochi fedeli finchè approda sulle coste africane. Lì chiede al re della Libia, Iarba, un pezzo di terra su cui fondare una città. Il re, folgorato dalla bellezza di Didone, non vuole dare ai fuggiaschi né asilo né terre ove stabilirsi, a meno che lei non acconsenta a sposarlo. La donna rifiuta e ottiene da Iarba "**tanta terra taurino quantum possent circumdare tergo**" (quanta una pelle di bue ne potesse circondare, Eneide I, 367-368). Didone accetta la sfida e riesce ad occupare la terra necessaria per fondare Cartagine: chiede un paio di forbici, taglia in strisce sottilissime la pelle, le annoda e con il filo ottenuto recinta un bel pezzo di terreno a forma di semicerchio. **Il problema di Didone è noto come problema isoperimetrico**: fra tutte le curve piane di ugual perimetro qual è quella che racchiude la massima area?

I Greci avevano capito che la soluzione era rappresentata dalla circonferenza (semicirconferenza nel caso di Didone), ma non ne possedevano una dimostrazione.

La soluzione geometrica rigorosa occupò i matematici per secoli. Vari tentativi di varia efficacia furono fatti da Archimede, Zenodoro, Pappo e poi in tempi più recenti da Eulero, Galileo, Legendre, L'Huilier, Riccati, Simpson, e, tra il 1838 e il 1841, **Steiner** fino a Hilbert.

Le varie fasi della dimostrazione

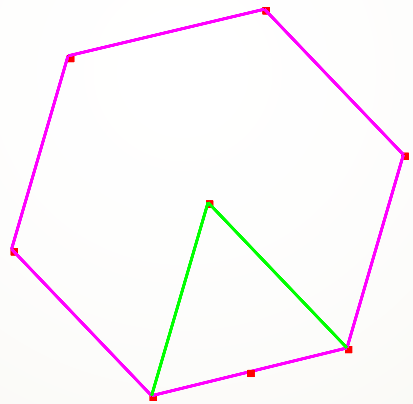
- Fra i triangoli isoperimetrici di data base, quello di area massima, è isoscele
- Fra i triangoli isoperimetrici, quello di area massima è equilatero
- Fra i quadrilateri isoperimetrici, quello di area massima è un quadrato
- In generale fra i poligoni isoperimetrici con n lati quello di area massima è un poligono regolare
- A parità di perimetro, un poligono regolare di n lati ha area maggiore di un poligono regolare di m lati con $0<m<n$
- …

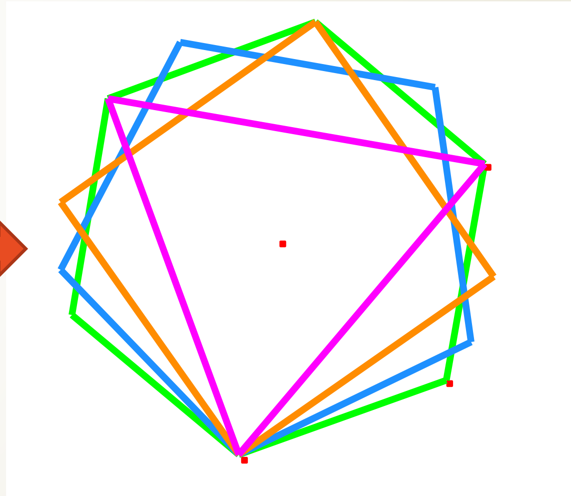
La congettura da dimostrare:

- A parità di perimetro, un poligono regolare di *n* lati ha area maggiore di un poligono regolare di *m* lati con $0<m<n$

Formula dell'area

$$A = a_n \cdot p$$





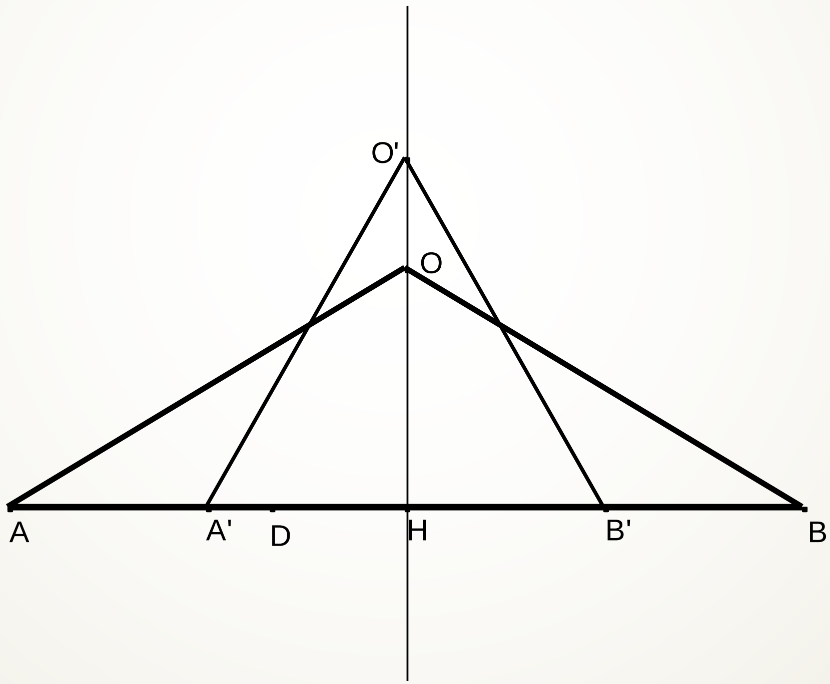
La procedura per ottimizzare l'area

È stato necessario sviluppare una procedura per calcolare l'area di poligoni regolari isoperimetrici con un numero sempre maggiore di lati.

Ricalcando le orme di **Archimede,** si è proceduto raddoppiando ad ogni passo il numero dei lati e sfruttando il teorema di Talete e il teorema della bisettrice si è giunti ad una formula relativa **all'apotema del poligono regolare isoperimetrico con un numero doppio di lati.**

Se si raddoppiano i lati del poligono, come si modifica l'apotema?

Apotema (2n) = $(r_n + a_n)/2$



La dimostrazione

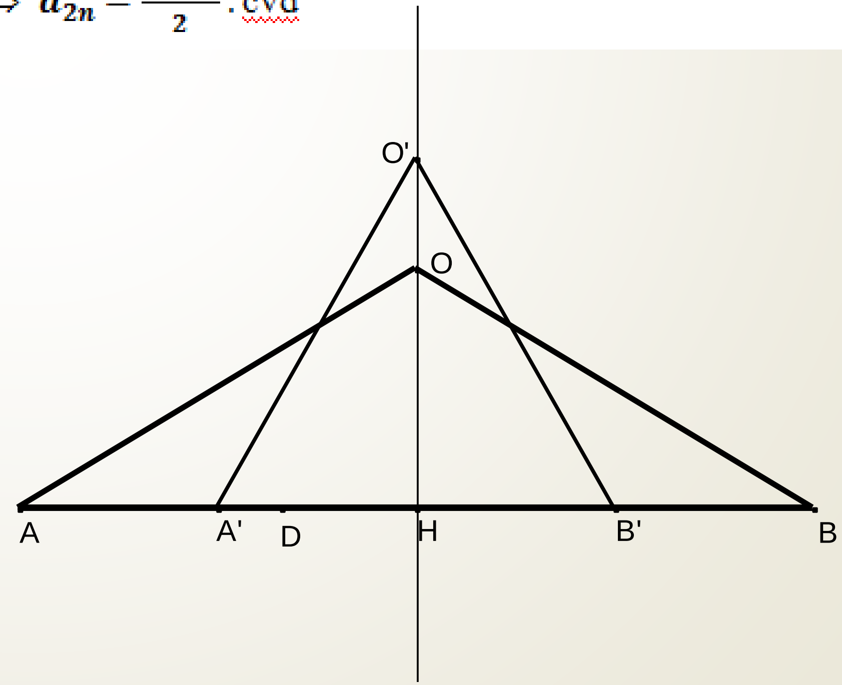
Siano $AH = \frac{1}{2} l_n$, $A'H = \frac{1}{4} l_n$, $HO' = a_{2n}$, $AO = r_n$, $OH = a_n$; Si costruisce OD//O'A', essendo O' il centro del poligono isoperimetrico con numero doppio di lati, dal momento che raddoppiando il numero dei lati si dimezza l'angolo al vertice, OD è bisettrice dell'angolo $A\hat{O}H$. Per il teorema di Talete essendo OD//O'A' $\Rightarrow$:

A'D:OO'=A'H:HO'=<u>DH:OH</u>, e per il teorema della bisettrice nel triangolo OAH $\Rightarrow$ AD:OA=<u>DH:OH.</u>

I rapporti sono perciò tutti uguali $\Rightarrow$ A'D:OO'=A'H:HO'= AD:OA= <u>DH:OH</u> $\Rightarrow$ $\frac{1}{4} l_n : a_{2n} = AD : r_n = DH : a_n$.

Da $\frac{1}{4} l_n : a_{2n} = DH : a_n \Rightarrow DH = \frac{\frac{1}{4} l_n \cdot a_n}{a_{2n}}$ e da $\frac{1}{4} l_n : a_{2n} = AD : r_n \Rightarrow AD = \frac{\frac{1}{4} l_n \cdot r_n}{a_{2n}}$; dalla somma di AD e DH che è AH

si ottiene la relazione $\frac{1}{2} l_n = \frac{\frac{1}{4} l_n \cdot a_n}{a_{2n}} + \frac{\frac{1}{4} l_n \cdot r_n}{a_{2n}}$ $/\cdot \frac{2 a_{2n}}{l_n}$ $\Rightarrow$ $\boldsymbol{a_{2n}} = \frac{a_n + r_n}{2}$. cvd

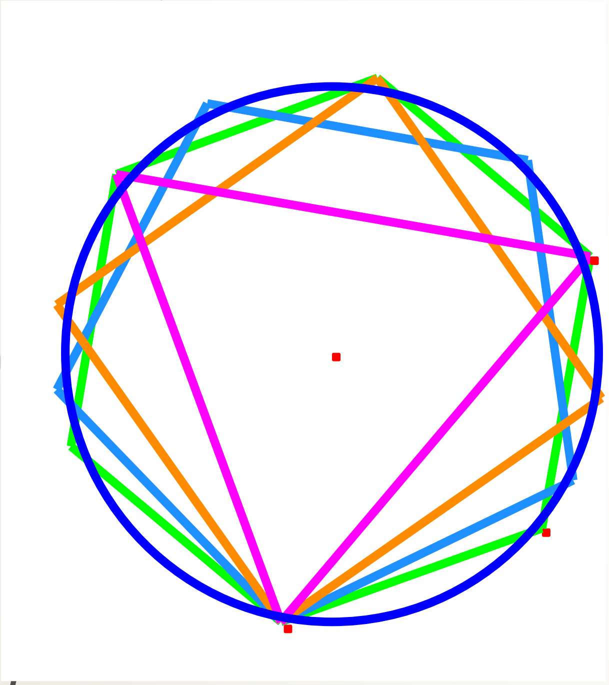


Come approssimare π

Partendo dal problema isoperimetrico e dal quadrato di perimetro =12

n	l(n)	a(n)	r(n)	a(2n)	A(n)	Atot
4	3	1,5	2,121320344	**1,810660172**	2,25	9
8	1,5	**1,810660172**	1,959844447	1,88525231	1,357995129	10,86396103
16	0,75	1,88525231	1,922186586	1,903719448	0,706969616	11,31151386
32	0,375	1,903719448	1,912930732	1,90832509	0,356947396	11,42231669
64	0,1875	1,90832509	1,910626523	1,909475807	0,178905477	11,44995054
128	0,09375	1,909475807	1,910051078	1,909763442	0,089506678	11,45685484
256	0,046875	1,909763442	1,909907255	1,909835349	0,044760081	11,45858065
512	0,0234375	1,909835349	1,909871301	1,909853325	0,022380883	11,45901209
1024	0,01171875	1,909853325	1,909862313	1,909857819	0,011190547	11,45911995
2048	0,005859375	1,909857819	1,909860066	1,909858943	0,005595287	11,45914691
4096	0,002929688	1,909858943	1,909859504	1,909859223	0,002797645	11,45915366
8192	0,001464844	1,909859223	1,909859364	1,909859294	0,001398823	11,45915534
16384	0,000732422	1,909859294	1,909859329	1,909859311	0,000699411	11,45915576
32768	0,000366211	1,909859311	1,90985932	1,909859316	0,000349706	11,45915587
65536	0,000183105	1,909859316	1,909859318	1,909859317	0,000174853	11,45915589
131.072	9,15527E-05	1,909859317	1,909859317	1,909859317	8,74264E-05	11,4591559

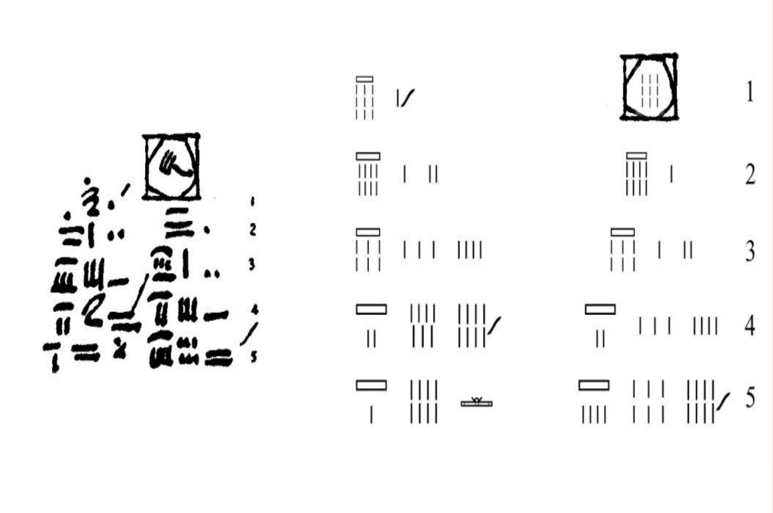
Perimetro =12



n	a(n)	Atot	pi-greco
4	1,5	9	4
8	1,810660172	10,86396103	3,313708499
16	1,88525231	11,31151386	3,182597878
32	1,903719448	11,42231669	3,151724907
64	1,90832509	11,44995054	3,144118385
128	1,909475807	11,45685484	3,14222363
256	1,909763442	11,45858065	3,141750369
512	1,909835349	11,45901209	3,141632081
1024	1,909853325	11,45911995	3,14160251
2048	1,909857819	11,45914691	3,141595118
4096	1,909858943	11,45915366	3,14159327
8192	1,909859223	11,45915534	3,141592808
16384	1,909859294	11,45915576	3,141592692
32768	1,909859311	11,45915587	3,141592663
65536	1,909859316	11,45915589	3,141592656
131072	1,909859317	11,4591559	**3,14159265**

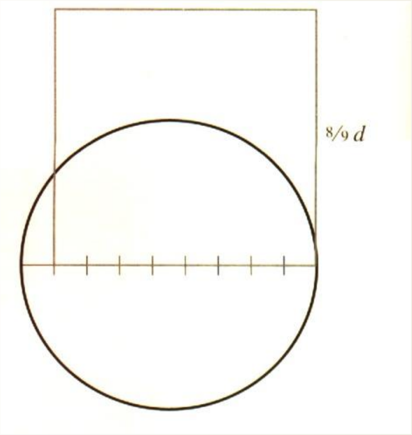
GLI EGIZI: PAPIRO DI RHIND

- La più antica documentazione esistente del calcolo dell'area di un cerchio ci è stata lasciata da uno **scriba egizio**, di nome **Ahmes**, intorno al **1650 a.c.**, in quello che è noto come il Papiro Rhind

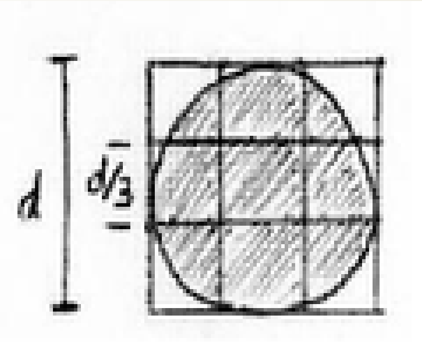


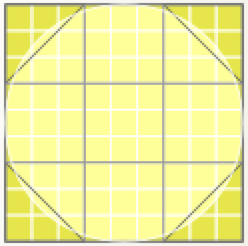
problema R48: calcolare **un pezzo di terra circolare di diametro 9 khet**

- *Qual è la sua superficie di terra? Chiede lo scriba Ahmes:*
- ***"tu devi sottrarre la nona parte del diametro, cioè 1khet, resto 8, devi moltiplicare 8 volte diventa 64. Questa è la sua area di terra, 64 setat"***

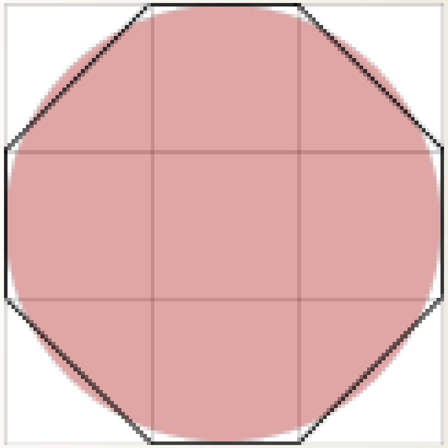


- Ma nel papiro di Rhind gli elementi figurali sono un **quadrato** con un **ottagono** in esso inscritto, nel cui centro è posto il numero 9, che coincide con la misura del diametro del cerchio dato.
- Si viene così condotti alla seguente interpretazione: si suddivide ciascun lato del quadrato in tre parti uguali, si procede ad una suddivisione in 9 quadretti uguali





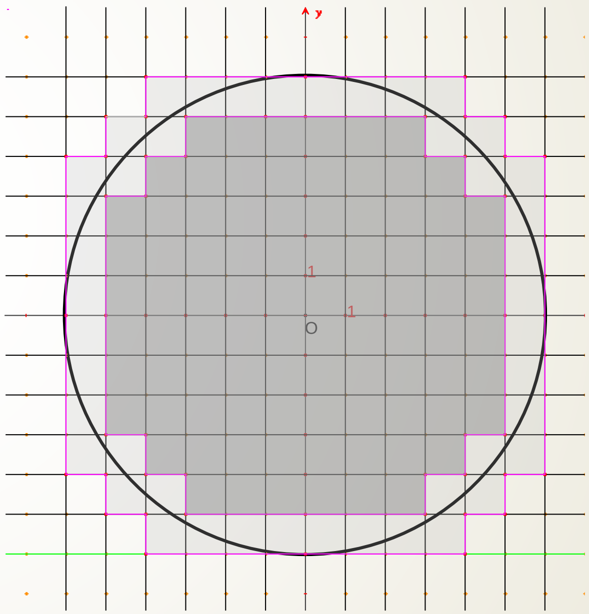
- Se si considera l'ottagono indicato, il cerchio di diametro 9 khet e l'ottagono hanno pressoché la stessa area, la superficie dell'ottagono è formata da 7 quadretti, dunque l'area dell'ottagono è 63 che è circa quella del quadrato di lato 8, cioè 64



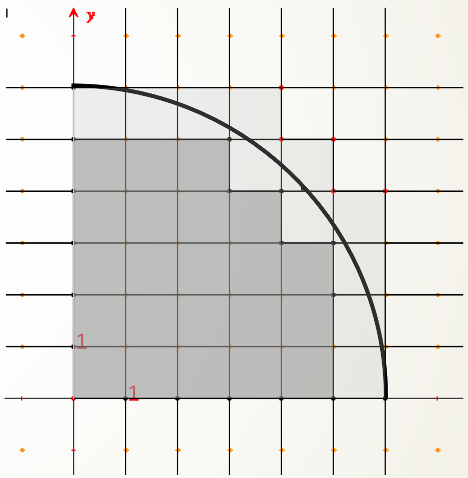
- **π = 3,16**

Area del cerchio attraverso plurirettangoli

- È possibile approssimare l'area di un cerchio considerando **plurirettangoli che sono interni al cerchio o che contengono il cerchio**



- È possibile considerando un quadrante, provare ad approssimarlo calcolando l'area dei quadretti da prendere in considerazione nel plurirettangolo che approssima il quadrante:



Partendo da un cerchio di raggio 6

	1	2	3	4	5	6
1	dentro	dentro	dentro	dentro	dentro	fuori
2	dentro	dentro	dentro	dentro	dentro	fuori
3	dentro	dentro	dentro	dentro	dentro	fuori
4	dentro	dentro	dentro	dentro	fuori	fuori
5	dentro	dentro	dentro	fuori	fuori	fuori
6	fuori	fuori	fuori	fuori	fuori	fuori

lato quadratino	n. quadrati nel plurirettangolo	Area plurirett. inscritto	Area plurirett. circoscritto	media	π
1	22	88	120	104	2,889
0,5	98	98	114	106	2,944
0,4	160	102,4	115,84	109,12	3,031
0,3	292	105,12	115,2	110,16	3,06
0,2	673	107,68	114,4	111,04	3,084
0,02	70370	112,592	113,28	112,936	**3,137**

π = **3,137**

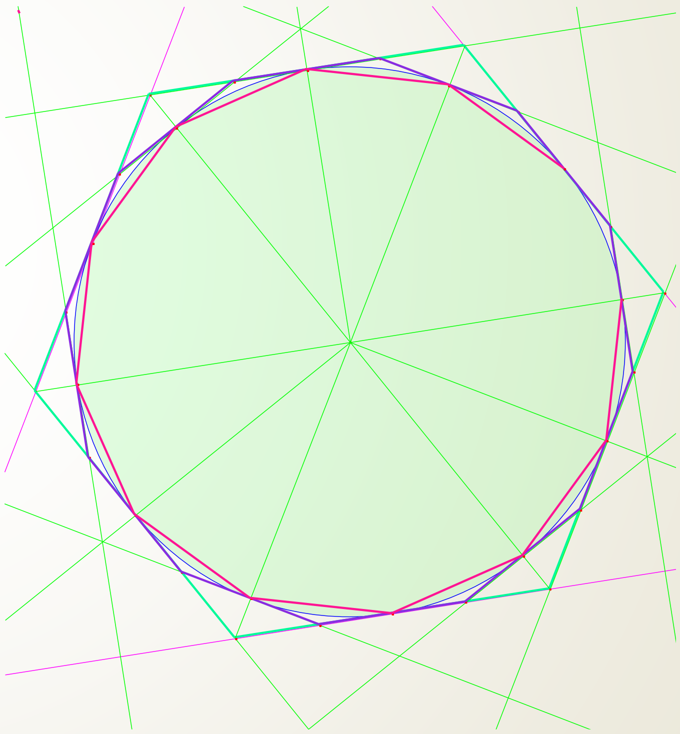
Questi sono i dati che abbiamo raccolto e questa è la migliore approssimazione per π

Risultati a confronto

Gli Egizi	Noi
Approssimando un cerchio con un ottagono composto da 7 quadratini	Approssimando il cerchio con un plurirettangolo formato da 281.480 quadratini
$\pi = 3,16$	$\pi = 3,137$

LA PAROLA AD ARCHIMEDE

- Per poter calcolare i perimetri dei poligoni che si susseguono, Archimede ha studiato a fondo le relazioni che intercorrono fra i lati dei poligoni inscritti e circoscritti in relazione a quelli che si ottengono raddoppiando il numero dei lati.
- <u>Si possono utilizzare le sue formule, questa volta con lo scopo di approssimare π, attraverso le aree di poligoni inscritti e circoscritti di un cerchio di raggio OA = 1, procedendo raddoppiando ogni volta il numero dei lati.</u>

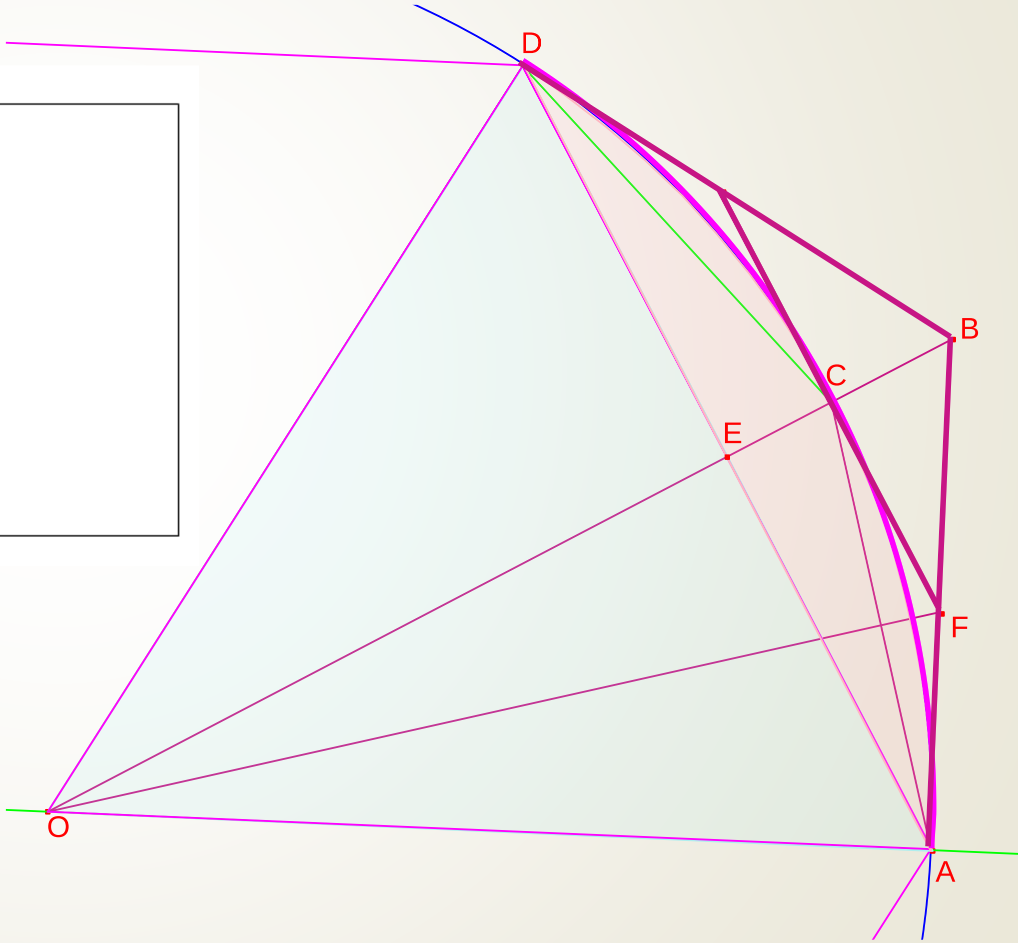


Le formule di Archimede

Formule di Archimede

$$L_{2n} = \frac{\ell_n \cdot L_n}{L_n + \ell_n}$$

$$\ell_{2n}^2 = \frac{L_n \cdot \ell_n^2}{2(\ell_n + L_n)} = \frac{L_{2n} \cdot \ell_n}{2}$$



Partendo dal quadrato …

K67 | f_x | 3,14159265358979

	B	C	D	E	F	H	I	K
42	n	l(n)	L(n)	L(2n)=ln*Ln/(ln+Ln)	l(2n)=(L(2n)*ln/2)^0,5	A1=nln*hn/2	A2=n(Ln)/2	pi.greco
43	4	1,414213562373100000	2,000000000000000000	0,828427124746190000	0,765366864730180000	2,000000000000000000	4,000000000000000000	?
44	8	0,765366864730180000	0,828427124746190000	0,397824734759316000	0,390180644032257000	2,828427124746190000	3,313708498984760000	**3,000000000000000000**
45	16	0,390180644032257000	0,397824734759316000	0,196982806714329000	0,196034280659121000	3,061467458920720000	3,182597878074530000	**3,100000000000000000**
46	32	0,196034280659121000	0,196982806714329000	0,098253699538934500	0,098135348654836000	3,121445152258050000	3,151724907429260000	**3,100000000000000000**
47	64	0,098135348654836000	0,098253699538934500	0,049097244217850900	0,049082457045824600	3,136548490545940000	3,144118385245910000	**3,100000000000000000**
48	128	0,049082457045824600	0,049097244217850900	0,024544924759132600	0,024543076571439900	3,140331156954750000	3,142223629942460000	**3,140000000000000000**
49	256	0,024543076571439900	0,024544924759132600	0,012272000315246800	0,012271769298309000	3,141277250932770000	3,141750369168970000	**3,141000000000000000**
50	512	0,012271769298309000	0,012272000315246800	0,006135942402845330	0,006135913525931950	3,141513801144300000	3,141632080703180000	**3,141000000000000000**
51	1024	0,006135913525931950	0,006135942402845330	0,003067963982177330	0,003067960372569530	3,141572940367090000	3,141602510256810000	**3,141500000000000000**
52	2048	0,003067960372569530	0,003067963982177330	0,001533981088686190	0,001533980637485410	3,141587725277160000	3,141595117749590000	**3,141590000000000000**
53	4096	0,001533980637485410	0,001533981088686190	0,000766990431542882	0,000766990375142791	3,141591421511200000	3,141593269629310000	**3,141592000000000000**
54	8192	0,000766990375142791	0,000766990431542882	0,000383495201671418	0,000383495194621407	3,141592345570120000	3,141592807599650000	**3,141592000000000000**
55	16384	0,000383495194621407	0,000383495201671418	0,000191747599073206	0,000191747598191955	3,141592576584870000	3,141592692092250000	**3,141592600000000000**
56	32768	0,000191747598191955	0,000191747599073206	0,000095873799316290	0,000095873799206134	3,141592634338560000	3,141592663215410000	**3,141592600000000000**
57	65536	0,000095873799206134	0,000095873799316290	0,000047936899630606	0,000047936899616836	3,141592648776990000	3,141592655996200000	**3,141592650000000000**
58	131072	0,000047936899616836	0,000047936899630606	0,000023968449811861	0,000023968449810139	3,141592652386590000	3,141592654191390000	**3,141592653000000000**
59	262144	0,000023968449810139	0,000023968449811861	0,000011984224905500	0,000011984224905285	3,141592653288990000	3,141592653740190000	**3,141592653000000000**
60	524288	0,000011984224905285	0,000011984224905500	0,000005992112452696	0,000005992112452669	3,141592653514590000	3,141592653627390000	**3,141592653000000000**
61	1048576	0,000005992112452669	0,000005992112452696	0,000002996056226341	0,000002996056226338	3,141592653570990000	3,141592653599190000	**3,141592653500000000**
62	2097152	0,000002996056226338	0,000002996056226341	0,000001498028113170	0,000001498028113169	3,141592653585090000	3,141592653592140000	**3,141592653500000000**
63	4194304	0,000001498028113169	0,000001498028113170	0,000000749014056585	0,000000749014056585	3,141592653588620000	3,141592653590380000	**3,141592653500000000**
64	8388608	0,000000749014056585	0,000000749014056585	0,000000374507028292	0,000000374507028292	3,141592653589500000	3,141592653589940000	**3,141592653589000000**
65	16777216	0,000000374507028292	0,000000374507028292	0,000000187253514146	0,000000187253514146	3,141592653589720000	3,141592653589830000	**3,141592653589000000**
66	33.554.432	0,000000187253514146	0,000000187253514146	0,000000093626757073	0,000000093626757073	3,141592653589770000	3,141592653589800000	**3,141592653589700000**
67	67.108.864	0,000000093626757073	0,000000093626757073	0,000000046813378537	0,000000046813378537	3,141592653589790000	3,141592653589790000	**3,141592653589790000**

Risultati a confronto

Archimede		
Approssimando la circonferenza con un poligono di 192 lati	Approssimando il cerchio con poligoni da **67.108.864 lati**	Approssimando il cerchio con poligoni isoperimetrici con **67.108.864 lati**
3,1408<π<3,1429	**3,14159265358979**	**3,14159265358979**

Una possibile alternativa

- Fra le formule di Archimede:
  - $l_{2n} = \sqrt{2 - \sqrt{4 - l_n^2}}$

  soluzione di un'equazione biquadratica che si ottiene da una semplice applicazione del teorema di Pitagora.
- Approssimando successivamente la circonferenza con poligoni inscritti ottenuti attraverso progressivi raddoppi dei lati
- Si noterà comunque la stessa velocità di convergenza, ma si verificherà anche la difficoltà legata alla gestione dei decimali, operando con formule così complesse.

Metodo di Montecarlo

Estremamente interessante può essere il calcolo sperimentale di π, quali il **metodo di Montecarlo**

- Le origini del Metodo Montecarlo risalgono alla metà degli anni ‘40 nell'ambito del Progetto Manhattan. I formalizzatori del metodo sono Enrico Fermi, John von Neumannn, il nome fa riferimento al gioco di azzardo.
- Si basa sulla selezione di numeri casuali e la convergenza è molto lenta.
- Anche effettuando un gran numero di calcoli, il numero non converge esattamente a π, ma bensì verso un valore approssimato di π
- Il metodo si basa su funzioni «random» che non sono vere funzioni casuali

Ago di Buffon

L'esperimento di Buffon:

- si considerano sul pavimento un fascio di rette parallele poste alla distanza $\boldsymbol{d}$ fra loro (per esempio gli assi di un pavimento in legno) e si lanci su di esso un ago di lunghezza $\boldsymbol{L}$, l'evento da considerare è che l'ago tagli una retta del fascio.
- Si può calcolare che la probabilità teorica che l'ago tagli una retta è: $\frac{2L}{d\pi}$
- Basandosi sulla definizione frequentista della probabilità **è possibile utilizzare la frequenza di tale evento** (considerando un gran numero di prove) **per stimare π**
- Buffon che per primo fece l'esperimento non si sa quale grado di approssimazione abbia ottenuto
- È stato calcolato che per ottenere una approssimazione di π con una precisione di 10^{-3}, con probabilità del 95%, bisognerebbe lanciare 900.000 aghi, in realtà Lazzarini ci riuscì con soli circa 3400 aghi.

L<d

L'ago taglia la retta se **BH>y**

con $BH = \frac{L}{2} sen(x)$

$P(y < \frac{L}{2} sen(x))$= rapporto fra aree

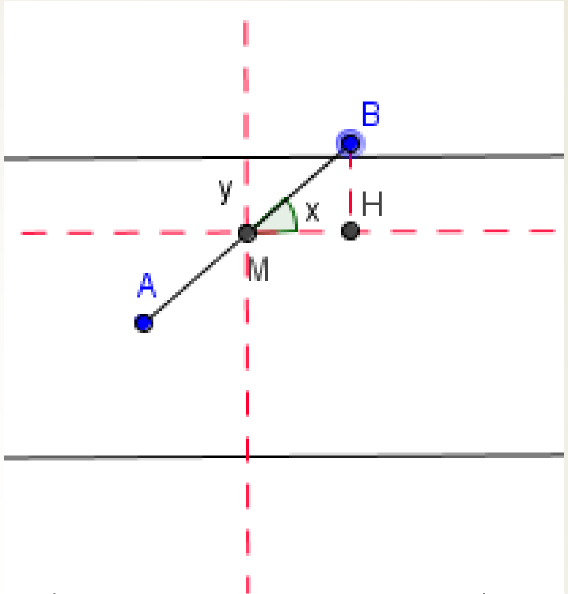
I limiti geometrici del problema sono:

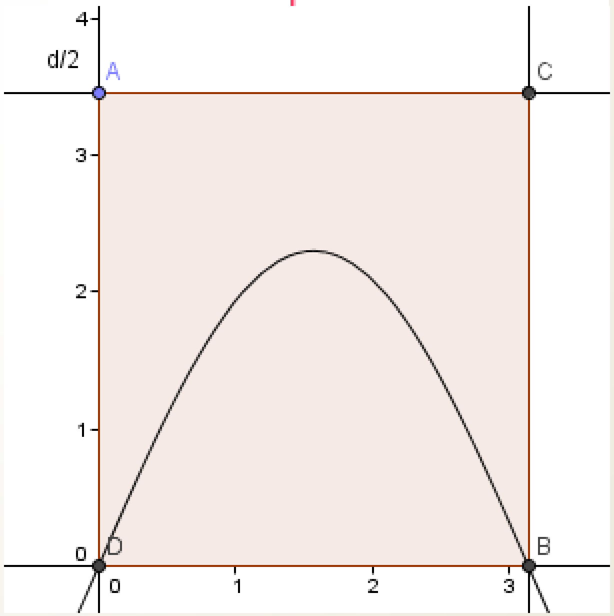
<u>Casi possibili</u>:

$(x, y)/0 < y < \frac{d}{2}, 0 < x < \pi \rightarrow$ *area del rettangolo* = $\frac{d}{2}\pi$

<u>Casi favorevoli</u>:

$(x, y)/ \quad y < \frac{L}{2} sen(x), 0 < x < \pi \; \pi \rightarrow$ *area dell'arco di sinusoide* $= \int_0^{\pi} \frac{L}{2} sen(x) dx = L$





Formule di Viéte

$$A = A_4 \cdot \frac{A_8}{A_4} \cdot \frac{A_{16}}{A_8} \cdot \frac{A_{32}}{A_{16}} \ldots$$

È la prima formula infinita per il calcolo di π, è una formula che si ispira alla procedura ideata da Archimede e che approssima di fatto l'area del cerchio con l'area di poligoni regolari inscritti con 2^n lati.

$$\pi = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}} \cdot \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} \cdot \ \ldots$$

Dimostrazione (trigonometrica)

- Partendo da un cerchio di raggio 1 e dal quadrato inscritto (*n*=2), usando le formule di bisezione e duplicazione si ha:

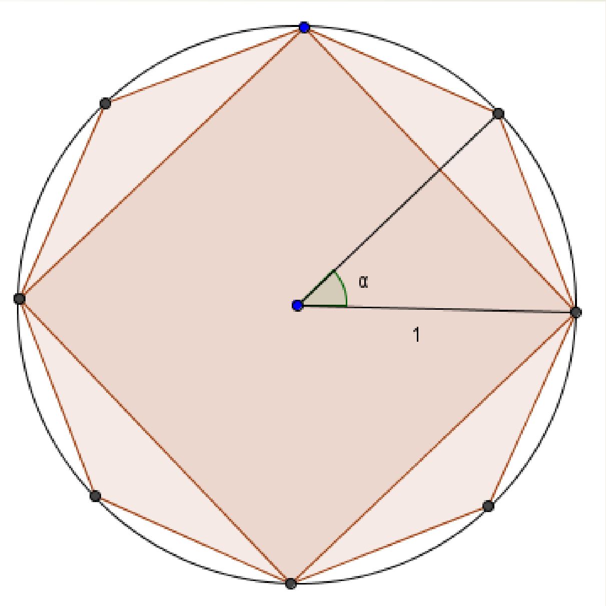
$$A_n = 2^n 1^2 sen\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)$$

$$A_{n-1} = 2^{n-1} sen\left(\frac{2\pi}{2^{n-1}}\right) = 2^{n-1} sen\left(2 \cdot \frac{2\pi}{2^n}\right)$$
$$= 2^{n-1} \cdot 2 \cdot sen\left(\frac{2\pi}{2^n}\right) \cdot cos\left(\frac{2\pi}{2^n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos}\left(\frac{\boldsymbol{\pi}}{\mathbf{2}^{\boldsymbol{n}-\mathbf{1}}}\right)}$$

Osservando che $\frac{A_4}{A_3} = \frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{8}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}$ si può dimostrare per induzione che : $\frac{A_n}{A_{n-1}} = \frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\ldots}}}$ *con n-2 radici.*

- Questa formula può essere facilmente trasformata in un algoritmo e utilizzata per calcolare in modo approssimato π



Altre formule infinite

- Formula di Wallis del prodotto infinito nel 1655

$$\pi = 2 \cdot \frac{2 \cdot 2}{1 \cdot 3} \cdot \frac{4 \cdot 4}{3 \cdot 5} \cdot \frac{6 \cdot 6}{5 \cdot 7} \cdot \ \ldots$$

- Formula di William Brouncker (1620-1684)

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{3^2}{2 + \cfrac{5^2}{2 + \cfrac{7^2}{\ldots}}}}$$

- Formula di James Gregory (arctangente) (1638-1675)

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ \ldots$$

- Formula di John Machin (1689-1752)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{4(-1)^k}{(2k+1) \cdot 5^{2k+1}} - \frac{(-1)^k}{(2k+1) \cdot 239^{2k+1}} \right)$$

Ramanujan

- Si è giunti a 206 miliardi di decimali
  - ✓ migliorando progressivamente le formule passando da prodotti infiniti, serie,
  - ✓ ma il grande salto compiuto nel secolo scorso è dovuto a nuove formule ad esempio:
  - $\pi = \frac{9801}{\sqrt{8}} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(4n)!(1103+26390n)}{(n!)^4 396^{4n}} \right)^{-1}$
  - **formule a convergenza** rapida dal 1973,

  - ✓ le nuove formule sono dovute direttamente o indirettamente a **Ramanujan**

L'ultima frontiera

- Il calcolo dei decimali esatti di π da un certo punto in poi:
  - Nel 1995 Simon Plouffe determina una formula per calcolare in disordine le cifre di π in base 2, e con essa calcola la 40 miliardesima cifra ed è un «1»
  - Nel 1997 Bellard ha raggiunto la 1000 miliardesima cifra binaria di π ed è «1» seguito da …
  - Nel 1999 Colin Percival è arrivato alla 40.000 miliardesima cifra decimale in binario ed è un « 0 » seguito da …

  senza aver calcolato le cifre precedenti.

Considerazioni finali

- π e l'evoluzione del computer
  - la caccia ai decimali di π ha stimolato il miglioramento progressivo dei metodi di calcolo delle operazioni elementari come la moltiplicazione rapida, la divisione o l'estrazione di radice rapida $\rightarrow$ NUMEROSE APPLICAZIONI GRAFICHE, NEL CAMPO DELLA MEDICINA, …
  - L' « algoritmizzazione » della matematica

- Possibili altri spunti di approfondimento possono essere:
  - Le operazioni con «riga e compasso»
  - La costruibilità di un numero
  - Lo studio degli altri problemi notevoli dell'antichità
  - …

BIBLIOGRAFIA

- « L'AFFASCINANTE NUMERO PI GRECO » di Jean-Paul Delahaye
- « CHE COS'È LA MATEMATICA? » di Richard Courant e Herbert Robbins
- « La geometria non-euclidea con la sfera di Lénárt » di István Lénárt

Articoli da « L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate» del Centro Morin

Si ringrazia per l'attenzione