Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 2 settembre 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
Corso di Laurea	Anno di immatricolazione

(1) Si enunci e si dimostri la Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz per due vettori in uno spazio vettoriale euclideo.
Si dia la definizione di angolo convesso tra due vettori di $\mathbb{R}^n$.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ l'operatore lineare definito da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^2$.

Si ha $f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, e $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, quindi per definizione di matrice associata a f nella base $\mathcal{E}$ si ha:

$$A = M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. L'operatore f è un isomorfismo?

Si ha

$$\det(A) = 2 \neq 0,$$

quindi A ha rango massimo 2 e si ha:

$$\mathrm{rg} A = \mathrm{rg}(f) = 2, \qquad \dim\ker(f) = 2 - \mathrm{rg}(f) = 2 - 2 = 0.$$

Segue che f è iniettiva e suriettiva, quindi f è un isomorfismo.

(c) Si consideri la retta vettoriale r di equazione cartesiana $x_2 = 0$. Si determini l'immagine di r tramite f, e se ne dia un'equazione cartesiana.

I vettori della retta vettoriale r sono del tipo $\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Le immagini di tali vettori tramite f sono del tipo

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 0 \\ x_1 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi l'immagine di r è la retta vettoriale r' con

$$r' = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

cioè la bisettrice del primo e terzo quadrante nel piano cartesiano. Una equazione cartesiana di tale retta è data da

$$x - y = 0.$$

(d) Si dica, motivando la risposta, se f è una rotazione del piano oppure no.

Ricordiamo che le rotazioni sono particolari isometrie, e una matrice associata ad una isometria in una qualunque base ortonormale risulta essere una matrice ortogonale. In particolare il determinante di una tale matrice è uguale a 1 oppure -1. Siccome $\mathcal{E}$ è una base ortonormale e siccome $\det M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f) = 2$, f non è un'isometria, e quindi nemmeno una rotazione.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

Il polinomio caratteristico di L_B è dato da:

$$p_{L_B}(x) = \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 \\ 1 & 1 & 1-x \end{pmatrix} =$$

$$= (1-x) \cdot \det \begin{pmatrix} 1-x & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-x \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1-x & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= (1-x)\big((1-x)^2 - 1\big) - 1(1-x-1) + 1\big(1-(1-x)\big) =$$

$$= (1-x)(x^2 - 2x) + x + x =$$

$$= x^2 - 2x - x^3 + 2x^2 + 2x =$$

$$= -x^3 + 3x^2 = -x^2(x-3).$$

Lo Spettro di L_B sono le radici di $p_{L_B}(x)$, quindi

$$\mathrm{Sp}(L_B) = \{0, 3\}.$$

Osservazione: si vede subito che B e' una matrice di rango 2, perchè le tre colonne sono uguali, quindi il nucleo di L_B ha dimensione due, e tale nucleo è l'autospazio relativo all'autovalore 0.

(b) Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

Autospazio relativo a 0:

$$V_0 = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mid x + y + z = 0 \right\} = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Con l'algoritmo di Gram-Schmidt troviamo la seguente base ortonormale del sottospazio V_0:

$$V_0 = \mathrm{Span} \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}.$$

L'autospazio relativo all'autovalore 3 ha dimensione 1 ed equazioni

$$\begin{cases} -2x + y + z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \end{cases}$$

Un versore che genera tale retta vettoriale è ad esempio $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}$.

Siccome per un operatore autoaggiunto, autospazi relativi ad autovalori distinti sono tra loro ortogonali, i tre vettori

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix} \right\}$$

formano una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$, formata da autovettori di L_B.

(c) Si scriva la matrice diagonale D simile a B, e una matrice invertibile N tale che valga

$$D = N^{-1} \cdot B \cdot N.$$

La matrice D ha sulla diagonale gli autovalori di L_B con le loro molteplicità algebriche, quindi

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

La matrice N risulta uguale alla matrice di passaggio dalla base canonica alla base $\mathcal{B}$, quindi

$$N = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{-\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{pmatrix}.$$

(4) (a) Si trovino delle equazioni cartesiana e parametriche del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ parallelo al piano

$$H' : \qquad x - z = 0$$

e passante per il punto $Q = (1, 1, 0)$.

Osserviamo che H' ha un'equazione omogenea, quindi la sua giacitura ha la stessa equazione, e tutti i piani paralleli ad H' hanno un'equazione cartesiana del tipo

$$x - z = d.$$

Imponendo il passaggio per Q troviamo $1 - 0 = d$, quindi l'equazione del piano cercato è

$$H : \qquad x - z = 1.$$

Per trovare delle equazioni parametriche baste porre $z = t, y = s$, e dalla equazione cartesiana troviamo $x = 1 + t$. Quindi le equazioni parametriche sono

$$H : \qquad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = s \\ z = t. \end{cases}$$

(b) Si scrivano delle equazioni cartesiane del fascio di piani passanti per la retta r determinata dai punti $Q = (1, 1, 0)$ e $S = (0, 0, -1)$.

La retta passante per Q e S ha come vettore di direzione il vettore

$$\vec{SQ} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

quindi delle equazioni parametriche sono date da

$$r: \qquad \begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+t \\ z = t. \end{cases}$$

E′ immediato trovare le equazioni cartesiane di r:

$$r: \qquad \begin{cases} x - z = 1 \\ y - z = 1 \end{cases}$$

Quindi il fascio di piani di centro r ha equazione

$$\alpha(x - z - 1) + \beta(y - z - 1),$$

al variare di $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.