Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 9 luglio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome
Corso di Laurea	**Anno di immatricolazione**

(1) Si dia la definizione di sottospazio vettoriale di uno spazio vettoriale. Si enunci e si dimostri la Formula di Grassmann per due sottospazi vettoriali.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'operatore lineare definito da

$$f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$.

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ quindi $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e $\mathrm{Im} f$. L'operatore f è un isomorfismo?

$\det A = 2 \neq 0 \Rightarrow \mathrm{rg}\, A = \mathrm{rg}\, f = 3 \Rightarrow \dim \ker f = 3 - \mathrm{rg}\, f = 0$

$\Rightarrow f$ è un isomorfismo

(c) Si considerino i tre piani coordinati

$$\Pi_1 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = 0 \right\}, \Pi_2 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_2 = 0 \right\}, \Pi_3 = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 = 0 \right\}$$

e i sottospazi vettoriali immagine tramite f:

$$V_1 = f(\Pi_1), \quad V_2 = f(\Pi_2), \quad V_3 = f(\Pi_3).$$

Si determinino le dimensioni di V_1, V_2 e V_3 e si scriva una base per ciascuno di essi.

$v \in \Pi_1 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $f\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ -x_2 \\ +x_2 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim f(\Pi_1) = 2$ con base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

$v \in \Pi_2 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_3 \\ x_1 \\ x_1 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim f(\Pi_2) = 2$ con base $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

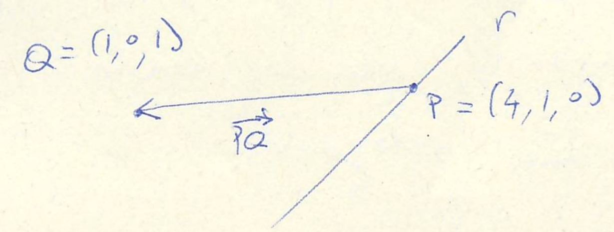
$v \in \Pi_3 \Leftrightarrow v = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_1 - x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \dim f(\Pi_2) = 2$ con base $\left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

(d) Nel caso f sia un isomorfismo, si determini l'isomorfismo inverso

$$f^{-1} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3.$$

Si ha: $M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f^{-1}) = \left(M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)\right)^{-1} = A^{-1}$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & -1/2 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; $f^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = A^{-1} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_2/2 + y_3/2 \\ -y_2/2 + y_3/2 \\ y_1 \end{pmatrix}$



(4) • Si trovino delle equazioni parametriche e cartesiana del piano H di $\mathbb{A}^3_{\mathbb{R}}$ passante per il punto $Q = (1, 0, 1)$ e contenente la retta r di equazioni parametriche

$$r: \quad \begin{cases} x &= 4 + t \\ y &= 1 \\ z &= t \end{cases}.$$

Si dica se il punto Q appartiene ad r oppure no.

La retta r è individuata dal suo punto $P = (4,1,0)$ e la giacitura $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$

H deve contenere r e Q $\Rightarrow$ la sua giacitura deve contenere il vettore $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix}1-4\\0-1\\1-0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}$; giacitura di H: $\mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$, e $Q \in H$:

eq. parametriche di H: $\begin{cases} x = 1+t-3s \\ y = -s \\ z = 1+t+s \end{cases}$

eq. cartesiana: $\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1 & -3 & x-1\\ 0 & -1 & y \\ 1 & 1 & z-1\end{pmatrix} = 2 \iff z - x + 4y = 0$

Infine: $Q \notin r$ perché $\begin{cases} 1 = 4+t \\ 0 = 1 \\ 1 = t \end{cases}$ NON è compatibile

• Si consideri, inoltre, il piano K di equazione cartesiana

$$K: \qquad x - 4y - z = 1.$$

Si determini la posizione reciproca del piano K e della retta r del punto precedente.

Oss. che K ha la stessa giacitura di H; infatti, le due eq. omogenee $z - x + 4y = 0$, $x - 4y - z = 0$ sono proporzionali

$\Rightarrow H \parallel K$, $H \supseteq r \Rightarrow K \parallel r$

e $K \not\supseteq r$ (ad esempio $P = (4,1,0) \notin K$ perché non soddisfa l'equazione di K)

(*) Essendo i 3 autospazi $V_0, V_{\sqrt{2}}, V_{-\sqrt{2}}$ relativi a 3 autovalori <u>distinti</u> di un operatore <u>autoaggiunto</u> (simmetrico), essi sono a due a due (automaticamente) ortogonali, quindi anche i tre vettori scelti sono a due a due ortogonali.

(3) Si consideri la matrice simmetrica

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- Si determini il polinomio caratteristico di $L_B : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

$$p_{L_B}(t) = \det \begin{pmatrix} -t & 1 & 0 \\ 1 & -t & 1 \\ 0 & 1 & -t \end{pmatrix} = -t \cdot \det \begin{pmatrix} -t & 1 \\ 1 & -t \end{pmatrix} - 1 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -t \end{pmatrix}$$

$$= -t \cdot (t^2 - 1) - 1 \cdot (-t) = -t(t^2 - 2)$$

$$\mathrm{Sp}\, L_B = \{0, \sqrt{2}, -\sqrt{2}\}$$

- Si trovi una base ortonormale $\mathcal{B}$ di autovettori per L_B.

$V_0 = \ker L_B$ ha dim 1, eq. $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \end{cases}$, base: $\left\{ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}$

$V_{\sqrt{2}} = \ker (L_B - \sqrt{2}\, \mathrm{Id})$ ha dim 1, eq. $\begin{cases} -\sqrt{2}\, x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 - \sqrt{2}\, x_3 = 0 \end{cases}$, base $\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}$

$V_{-\sqrt{2}} = \ker (L_B + \sqrt{2}\, \mathrm{Id})$ ha dim 1, eq. $\begin{cases} \sqrt{2}\, x_1 + x_2 = 0 \\ x_2 + \sqrt{2}\, x_3 = 0 \end{cases}$ base $\left\{ \begin{pmatrix} -1/2 \\ \sqrt{2}/2 \\ -1/2 \end{pmatrix} \right\}$

- Si scriva la matrice di passaggio dalla base canonica $\mathcal{E}$ di $\mathbb{R}^3$ alla base $\mathcal{B}$. (*)

Scriviamo prima la matrice di passaggio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{E}$:

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \\ 0 & \sqrt{2}/2 & \sqrt{2}/2 \\ -1/\sqrt{2} & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$

allora vale $M^{\mathcal{E}}_{\mathcal{B}}(\mathrm{Id}) = \left(M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(\mathrm{Id}) \right)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 & -1/2 \\ 1/2 & \sqrt{2}/2 & 1/2 \\ -1/2 & \sqrt{2}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$