

Corso di GEOMETRIA - Prova scritta
A.A. 2018/2019 - 12 febbraio 2019
Prof. Valentina Beorchia

Cognome	Nome

- (1) Si scriva la definizione di matrice inversa di una matrice quadrata. Si scriva la formula per la matrice inversa per mezzo della matrice dei cofattori. Si dimostri che una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ è invertibile se e solo se il suo determinante è diverso da zero.

(2) Sia $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ l'applicazione lineare definita da

$$f \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ -2x_1 - 4x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}.$$

(a) Si scriva la matrice $A = M_{\mathcal{E}}^{\mathcal{E}}(f)$ di f nella base canonica \mathcal{E} di \mathbb{R}^3 .

(b) Si determinino la dimensioni di $\ker f$ e un sua base e la dimensione di $\text{Im} f$ e una sua base.

(c) Si dica se $\ker f$ e $\text{Im} f$ sono in somma diretta in \mathbb{R}^3 .

(d) Si dica per quali valori di $a \in \mathbb{R}$ si ha che il vettore

$$\begin{pmatrix} 0.5 \\ 1.5 \\ a \end{pmatrix} \in \text{Im} f.$$

(3) (a) Sia $B \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata simmetrica. Si dimostri che anche

$$B^2 = B \cdot B$$

è una matrice quadrata simmetrica.

(b) Si consideri in particolare la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si calcoli

$$C = B^2,$$

si determini il polinomio caratteristico di $L_C : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e il suo spettro.

(c) Si trovi una base ortonormale di autovettori per L_C .

- (4) (a) Si trovi un'equazione cartesiana del piano H di $\mathbb{A}_{\mathbb{R}}^3$ passante per il punto $Q = (-1, 0, -1)$ e contenente la retta r di equazioni cartesiane

$$r : \begin{cases} z - x = 2 \\ x + y = 1 \end{cases} .$$

- (b) Si determinino delle equazioni cartesiane e parametriche della generica retta passante per Q e contenuta nel piano H trovato nel punto precedente.