PERCORSI DI APPRENDIMENTO DELL'*EARLY* ALGEBRA: UN'ESPERIENZA CON IL PROGETTO ARAL

Valentina Bologna

Trieste, 30 gennaio 2015

- Verranno presentati alcuni percorsi per la scuola primaria e la scuola secondaria di primo grado che illustrano **strategie metodologiche** per il **riconoscimento e l’acquisizione** nell’alunno di quelle strutture del pensiero che conducono **all’astrazione** e in ambito matematico alla capacità di **tradurre** in **linguaggio algebrico** i contenuti disciplinari.

Contenuti e materiali tratti dalle presentazioni svolte nell’ambito del progetto ArAl

- Castelfranco Emilia 10/11 dicembre 2014
- Trieste, 4/5 novembre 2014

Che cos’è l’*early algebra*

- un approccio all’insegnamento e all’apprendimento della matematica che promuove l’insegnamento dell’aritmetica in una prospettiva algebrica sin dai primi anni della scuola primaria, se non dalla scuola dell’infanzia.

Che cos'è l'*early algebra*

- è un'area di ricerca a livello internazionale nell'ambito dell'educazione matematica. In questa cornice, dal 2000, il GREM (Gruppo di Ricerca in Educazione Matematica, operante presso l'Universita□ di Modena e Reggio Emilia) ha avviato il

Progetto ArAl, Percorsi nell'aritmetica per favorire il pensiero prealgebrico

www.aralweb.unimore.it

www.progettoaral.wordpress.com

Nel progetto ArAl

- Si coniugano tre livelli
  - ricerca
  - sperimentazione
  - Formazione
- con l'obiettivo di dimostrare, a differenza di ciò che avviene nell'insegnamento tradizionale della matematica, in cui lo studente incontra l'algebra alla fine della scuola secondaria di primo grado, come sia possibile ed efficace iniziare molto prima l'avvio al pensiero algebrico per favorire negli alunni la costruzione di solide basi per la comprensione del significato degli oggetti e dei processi algebrici.

Prospettiva didattica

Uno dei problemi più sentiti dagli insegnanti nel passaggio dalla scuola secondaria di primo a quella di secondo grado riguarda le difficoltà che gli studenti incontrano nell'approccio all'algebra. Questo avviene soprattutto a causa della **perdita di controllo sui significati degli oggetti matematici**, spesso deboli, o addirittura mai costruiti, in conseguenza **di una didattica che presenta gli oggetti in modo meccanico**, come fatti da apprendere, e quindi mai posti in discussione. Questo comporta negli studenti disaffezione e distacco verso la disciplina e, di riflesso, negli insegnanti, frustrazione e senso di impotenza.

- Sin dagli anni 80 la ricerca ha messo in luce come molte di tali difficoltà abbiano radici nell’insegnamento dell’aritmetica nella scuola primaria, rivolto essenzialmente agli **aspetti calcolativi** e finalizzati al raggiungimento di ‘**risultati**’, e ha posto il problema della necessità di una rivisitazione dell’insegnamento dell’aritmetica in chiave pre-algebrica centrata sull’attenzione ai **processi** come antidoto al tecnicismo.

- In diversi studi, come nel progetto ArAl, si promuovono una visione dell’algebra come linguaggio e modalita□ didattiche di tipo socio-costruttivo in cui l’insegnante devolve agli allievi la costruzione del sapere da apprendere favorendo l’interazione collettiva a partire dall’esplorazione di opportune situazioni problematiche. Questa visione si deve confrontare peraltro con la realtà di una scuola italiana dotata di una impostazione generalmente trasmissiva. L'obiettivo è quello di favorire un mutamento graduale della metodologia di lavoro in classe, attraverso l'assunzione consapevole da parte dell'insegnante del punto di vista della matematica come linguaggio, il quale fornisce lo strumento per eccellenza della costruzione concettuale, per la deduzione logica, per lo sviluppo dello spirito critico.

- L’evoluzione di tali studi, iniziati con allievi di 11-14 anni, conduce ad una crescente attenzione verso la scuola primaria (e la scuola dell'infanzia) e all’affermarsi della cosiddetta ‘early algebra’, area d’insegnamento che appare oggi nei programmi di paesi quali l'Inghilterra e gli Stati Uniti. In essa si sostiene che i principali ostacoli cognitivi nell’apprendimento dell’algebra nascono in modi spesso insospettabili in contesti aritmetici e possono porre in seguito ostacoli concettuali anche insormontabili allo sviluppo del pensiero algebrico.

Dal punto di vista curricolare:

Gli inserimenti più significativi riguardano:

(a) gli aspetti linguistici e quindi la pluralità delle rappresentazioni;

(b) gli aspetti relazionali, analogici, strutturali;

(c) significati procedurale e relazionale del segno ‘=’;

(d) l’attenzione alle proprietà (in particolare alla distributiva);

(e) l’approccio alla lettera come rappresentativa di un numero nascosto da individuare (incognita), o di numeri possibili (numero generico, variabile)

(f) l’approccio alle equazioni;

(g) l’approccio alle disequazioni;

(h) l’esplorazione di regolarità all’interno di un percorso che conduce all’universo delle funzioni.

Dal punto di vista del docente:

- Quando, in base alla nostra esperienza e alle nostre convinzioni, si ritiene che cominci l’algebra? Quando è iniziata, nel nostro ricordo di studenti? Quando inizia, per gli insegnanti? In terza media? Prima?
- E se comincia ‘prima’, prima quando? Quali sono i segnali che fanno capire a noi e ai nostri alunni che stiamo ‘facendo algebra’?

ESEMPIO 1 (8 anni)

Gli alunni stanno riflettendo su:

5+6=11 11=5+6

Piero osserva:
"E' giusto dire che 5 più 6 fa 11 ma non si può dire che 11 'fa' 5 più 6, quindi è meglio dire che 5 più 6 'è uguale a' 11 perché in questo caso è vero anche il contrario".

Cosa potete dire della frase di Piero?

Piero sta discutendo il significato relazionale **del segno uguale.**

- Insegnanti e alunni 'vedono' operazioni a sinistra del segno '=' e un risultato alla sua destra. In questa prospettiva il segno 'uguale' esprime il significato procedurale di 'operatore direzionale' e ha una connotazione prevalentemente spazio- temporale (sinistra-destra, prima-dopo) che viene espressa con il verbo ‘fare’.

- La consegna "Scrivi 14 più 23" spesso ottiene la risposta '14+23=' in cui ' = ' è considerato un necessario 'segnale di conclusione' ed esprime la convinzione che essa, prima o poi, viene richiesta dal docente. '14+23 'è vista come incompleta. Gli alunni soffrono qui per un controllo dei significati povero o assente.

COMPORTAMENTO CONSUETO

- Quando si passa all'algebra, il segno ‘=‘ acquista un significato relazionale diverso, poichè indica l'uguaglianza tra due rappresentazioni della stessa quantità.
- Piero sta imparando a muoversi in un universo concettuale in cui sta andando al di là della familiare connotazione spazio-temporale. Per fare questo, gli alunni devono 'vedere' i numeri ai due lati del segno 'uguale' in un modo diverso;
- il concetto di rappresentazione di un numero diventa cruciale.

PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

ESEMPIO 2 (9 anni)

Miriam rappresenta il numero di dolci: (3+4)×6.
Alessandro scrive: 7×6.
Lea scrive: 42.
Miriam osserva: «Quello che ho scritto è più trasparente, le frasi di Alessandro di Lea sono opache. Opaco significa che non è chiaro, trasparente significa che è chiaro, che si capisce».

Cosa potete dire della frase di Miriam?

Miriam riflette su come la rappresentazione non canonica di un numero aiuti a interpretare e illustrare la struttura di una situazione problematica

COMPORTAMENTO CONSUETO

- Tradizionalmente, nella scuola primaria italiana, gli studenti si abituano a vedere i numeri come termini di un'operazione o come risultati.
  Questo porta, tra l'altro, a vedere la soluzione di un problema come ricerca di operazioni da effettuare. Il punto di vista prevalente è di natura procedurale: i numeri sono entita□ che devono essere manipolate.
- Gli studenti non sono guidati verso la riflessione, attraverso l'analisi della rappresentazione del numero, sulla sua struttura.
  Gli insegnanti raramente spiegano che...

PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

... ogni numero può essere rappresentato in diversi modi, attraverso una qualsiasi espressione equivalente ad esso: uno (ad esempio 12) è il suo nome, la cosiddetta forma **canonica**, tutti gli altri modi di nominarlo (3×4, (2+2)×3, 36/3, 10+2, 3×2×2, ...) sono forme **non canoniche**, e ognuna di loro riceverà un senso senso in relazione al contesto e al **processo** sottostante. Come Miriam osserva, la forma canonica, che rappresenta un **prodotto**, è **opaca** in termini di significati. La forma non canonica rappresenta un processo ed è **trasparente** in termini di significati.

Saper riconoscere e interpretare queste forme crea negli alunni la base semantica per accettare e comprendere, negli anni successivi, scritture algebriche come a-4p, ab, x2y, k / 3.
Il complesso processo che accompagna la costruzione di queste competenze dovrebbe essere sviluppato nel corso dei primi anni di scuola.
Il concetto di forma canonica / non-canonica comporta per gli alunni (e per i docenti) implicazioni essenziali per riflettere sui possibili significati attribuiti al segno di uguaglianza.
Vedremo fra poco un esempio di queste abilità.

ESEMPIO 3 (11 anni)

Gli alunni hanno il compito di rappresentare in linguaggio matematico la frase: "Raddoppia la somma fra 5 e il numero successivo."
Quando le proposte vengono visualizzate alla lavagna Diana indica la frase di Filippo e giustifica la sua scrittura: "Filippo ha scritto $2\times(5+6)$ ed è giusto. Ma io ho scritto $2\times(5+5+1)$ perché in questo modo è evidente che il numero successivo a 5 è una unità più grande. La mia frase è più trasparente".

Cosa possiamo dire della frase di Diana?

Diana esalta gli aspetti relazionali del numero, resi evidenti dalla sua forma non-canonica, in termini di trasparenza (vs opacità).

Dalla griglia 10x10 alla griglia nxn

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99

Verso la generalizzazione

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→	+1	+1	+1	+1	+1
←	-1	-1	-1	-1	-1
↓	+5	+6	+8	+10	+n
↑	-5	-6	-8	-10	-n
↙	+4	+5	+7	+9	?
↗	-4	-5	-7	-9	?
↘	+6	+7	+9	+11	?
↖	-6	-7	-9	-11	?

Rappresentazione canonica e non canonica di un numero

v	5×5	6×6	8×8	10×10	n×n
→	+1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+1
←	-1	[illegible]	[illegible]	[illegible]	-1
↓	+5	[illegible]	[illegible]	[illegible]	+n
↑	-5	-6	-8	-10	-n
↙	+(5-1)	+(6-1)	+(8-1)	+(10-1)	+(n-1)
↗	-(5-1)	-(6-1)	-(8-1)	[illegible]	-(n-1)
↘	+(5+1)	+(6+1)	+(8+1)	+(10+1)	+(n+1)
↖	-(5+1)	-(6+1)	-(8+1)	[illegible]	-(n+1)

-n+1

-n-1

Quali sono i concetti in GIOCO?

- RAPPRESENTARE VS RISOLVERE
- IL SIGNIFICATO DELL'*UGUALE*
- FORMA CANONICA E NON CANONICA DI UN NUMERO

VERSO LA PROSPETTIVA PRE-ALGEBRICA

Su un ramo ci sono 3 corvi. Ne arrivano altri 5.
Quanti sono i corvi rimasti sul ramo?

Su un ramo ci sono 3 corvi. Ne arrivano altri 5.
Rappresenta *la situazione in linguaggio matematico in modo che qualcun altro possa trovare il numero dei corvi sul ramo.*

Gli alunni propongono frasi come:

3+5   5+3   3+5=8   3+5=   8   3+5=n

Come si possono interpretare in relazione alla consegna?

Prospettiva **aritmetica**	Prospettiva **algebrica**

Sul ramo ci sono 3 corvi. Ne arrivano altri 5

Quanti sono in tutto?	*Rappresenta la situazione in linguaggio matematico.*
Cercare il risultato	**Posporre** la ricerca del risultato
Prodotto 8	**Processo** 3+5; 5+3; 3+5=8
opaco	**trasparente**

3+5=8

Forma non canonica	Forma canonica
Processo	Prodotto
Trasparente	Opaco

Dalla lettura procedurale alla lettura relazionale

4×2+1=9 **uguaglianza**

Lettura procedurale

- “Faccio 4 per 2 più 1 e mi risulta 9”
- “Moltiplico 4 per 2, aggiungo 1 e ottengo 9”
- “Sommo il doppio di 4 a 1 e trovo 9”
- “ … mi dà … “

Cosa faccio

(a+b)×(a-b)

Sommo a con b, poi sottraggo b ad a e infine moltiplico i due risultati

Prodotto di due binomi

Cos’è

Verso l'oggettivazione

L'oggetto

$(x-7)\times 5=3x+10$

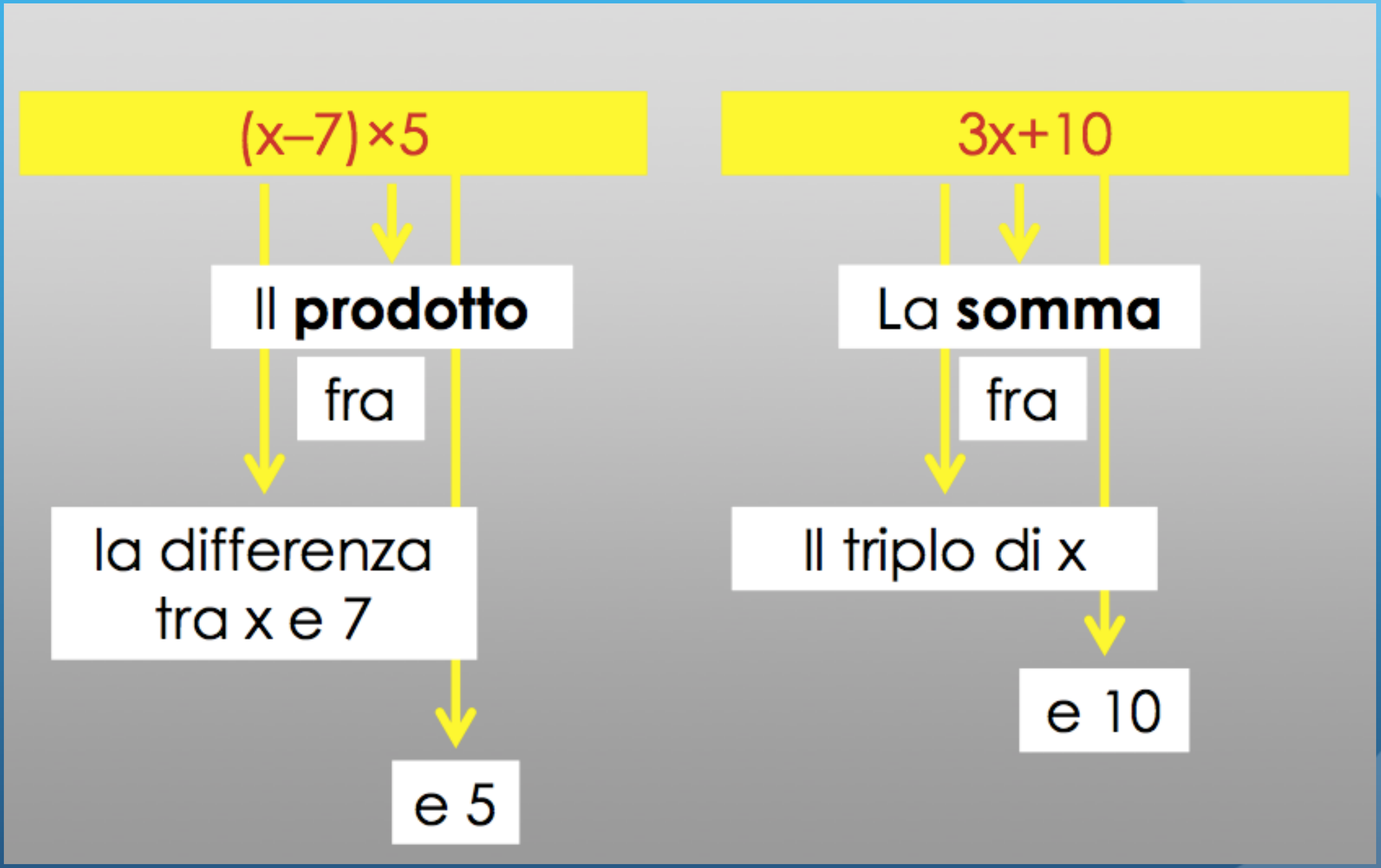
è una uguaglianza fra due oggetti

$(x-7)\times 5$ | $3x+10$

cosa **è** l'oggetto $(x-7)\times 5$?

cosa **è** l'oggetto $3x+10$?

La lettura relazionale



Verso il *balbettio algebrico*

Cosa è un oggetto matematico

$\boxed{(a+b)^2}$	$\longleftrightarrow$	quadrato di un binomio
a^3-b^3		differenza di due cubi
$(3-b^3)(5a+4b)$		prodotto di due binomi

La capacità di nominare gli oggetti dipende dal fatto che lo studente non sia stato abituato solo ad operare sugli oggetti:

$(3+5)^2=8^2=64$

$3+5$

$(3+5)^2 \longleftrightarrow$ quadrato di una somma

Approccio all'algebra come linguaggio

Didattica tradizionale

pensiero aritmetico

pensiero algebrico

successivamente

Prospettiva early algebra

pensiero aritmetico

pensiero algebrico

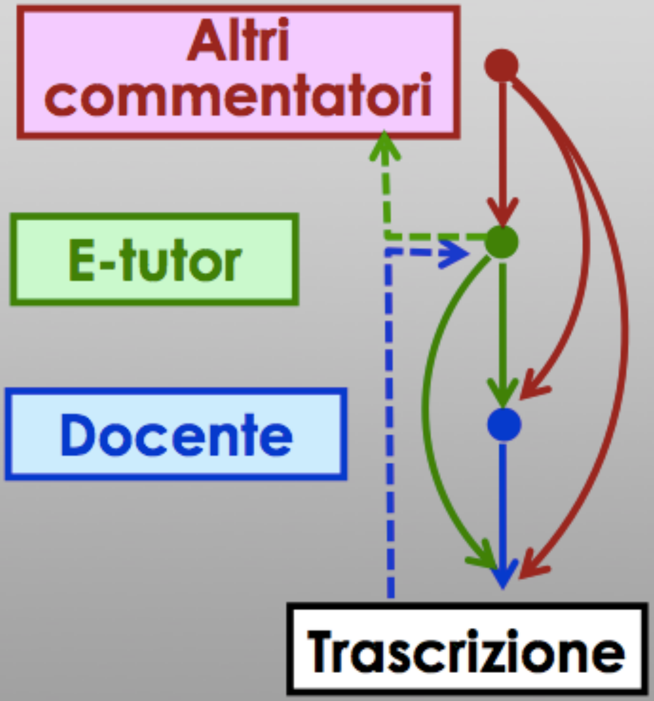
intreccio

Approccio alla generalizzazione

Rinnovare la metodologia…

Tutti gli episodi di classe che abbiamo esaminato sono ricavati da **trascrizioni di audioregistrazioni** effettuate da docenti dei gruppi ArAl della scuola dell'infanzia, primaria e secondaria di primo grado in applicazione della Metodologia delle Trascrizioni Pluricommentate.

Attraverso gli episodi esploriamo ipotesi operative e riflessioni teoriche sui modi per favorire dalla scuola primaria alla secondaria di primo grado un percorso didattico teso **verso la generalizzazione**.



Un insegnante

- registra una lezione,
- invia la sua Trascrizione Commentata (TC) all'E-tutor.

L'E-Tutor

- commenta la TC,
- invia la nuova versione agli **altri membri** del team che aggiungono i loro commenti.

La TC diventa un potente strumento di riflessione e di apprendimento per gli insegnanti.

Costruzione sociale della conoscenza

La metodologia dei diari pluricommentati intende fornire un contributo in questa direzione, potenziando la sensibilità degli insegnanti verso il cosa notare. Costruendo insegnanti metacognitivi che favoriscano lo sviluppo di studenti metacognitivi.

Costruzione sociale della conoscenza

Consegnare l'obiettivo cognitivo agli studenti

LE COMPETENZE IN AMBITO LINGUISTICO

A1. Tradurre in linguaggio naturale un numero espresso in forma non canonica;
Es: 3×2+5

A2. Tradurre in linguaggio matematico un numero espresso attraverso una definizione procedurale;
Es: Addiziona 4 a 15 e togli 9

A3. Tradurre in linguaggio matematico un numero espresso attraverso una definizione relazionale.
Es: Il doppio della somma fra 51 e 37

LE COMPETENZE IN AMBITO LINGUISTICO

A4. Esprimere in linguaggio naturale il confronto tra numeri scritti in forma canonica e non canonica, cogliendo le equivalenze senza calcoli scritti e argomentando le scelte

Es: $6 \times n - 4$ e $4 + n \times 3 \times 2$

A5. Ricavare scritture equivalenti ad una data esplicitando, dov'è possibile, le proprietà applicate

Es: $27 - \blacktriangle = 15$

A6. Completare frasi scritte in linguaggio matematico in cui un punto di domanda sostituisce un segno

Es: 5×0 ? $0:12$

Una rivoluzione copernicana?

A4.
Confrontare 37+56 e 39+54 e argomentare le conclusioni.

Il ricercatore propone allora queste scritture:

37+a

39+a+2

L'insegnante le confronta correttamente usando la strategia precedente e conclude:

I: Il risultato è lo stesso.

Come?

L'esempio illustra in modo chiaro un aspetto nodale: è necessario non solo che gli insegnanti comprendano la differenza fra procedurale e relazionale, ma che il punto di vista relazionale diventi per loro un valore.
Nell'esempio, l'insegnante ha spontaneamente parlato di 'risultato' in entrambi i casi e non ha colto – a livello consapevole – di aver effettuato un confronto tra numeri o, meglio, tra le loro rappresentazioni.
Sarebbe più corretto affermare che, poiché si aggiunge 2 al primo addendo e si toglie 2 al secondo, il numero 37+56 è uguale al numero 39+54.

Verso la competenza linguistica/matematica

- a livello **metalinguistico**, che comporta la comprensione del significato della consegna 'Traduci', che conduce alla categoria del **rappresentare**, contrapposta a quella del **risolvere**.
- a livello **linguistico**, relative all'interpretazione delle scritture e alla produzione delle traduzioni nei loro aspetti **semantici** e **sintattici**.

Per una riflessione metodologica

- La prospettiva pre-algebrica
  - Dalla procedura alla relazione
- La riflessione linguistica
  - le traduzioni
  - Le rappresentazioni
- Il risultato didattico:
  - Per i DSA
  - Per la costruzione del pensiero astratto

BUON LAVORO!