RICHIAMI DI MATEMATICA FINANZIARIA CLASSICA

Anna Rita Bacinello

AGENDA

- operazioni finanziarie certe
- differenza tra due date e conversione di date in numeri
- leggi finanziarie e relative proprietà
- tassi equivalenti
- rendite
- ammortamenti
- criteri di scelta tra operazioni finanziarie e applicazioni

OPERAZIONI FINANZIARIE CERTE

- Un'operazione finanziaria certa x/t è una coppia di vettori di ugual dimensione $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ e $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$, dove
  - ▷ x ha come componenti numeri reali che rappresentano importi $\rightsquigarrow$ crediti, se > 0; (opposti di) debiti, se < 0
  - ▷ t, detto scadenzario dell'operazione, ha come componenti date (giorno, mese, anno) ordinate in senso strettamente crescente
- Sia t_0 la data in cui l'operazione viene concordata:
  - ▷ se $(t_1 = t_0) \wedge (x_1 \neq 0)$ l'operazione viene detta a pronti, o spot $\rightsquigarrow$ già al momento dell'accordo si paga o si riceve qualcosa
  - ▷ se $(t_1 > t_0) \vee (x_1 = 0)$ l'operazione viene detta a termine, o forward $\rightsquigarrow$ al momento dell'accordo non si paga né si riceve nulla, ma si decidono semplicemente i pagamenti futuri
- Se gli elementi di x cambiano segno solo una volta e sono
  - ▷ inizialmente < 0, poi > 0, si ha a che fare con un'operazione di puro investimento
  - ▷ inizialmente > 0, poi < 0, l'operazione viene detta di puro finanziamento
- Si noti che l'ordinamento tra date è di tipo lessico-grafico

SOMMA DI OPERAZIONI FINANZIARIE CERTE

- Siano $x/r = (x_1, \ldots, x_l)/(r_1, \ldots, r_l)$ e $y/s = (y_1, \ldots, y_m)/(s_1, \ldots, s_m)$ due operazioni finanziarie certe
- Si consideri il vettore $t = (t_1, t_2, \ldots, t_n)$ ottenuto, in alternativa:
  - ▷ concatenando i due vettori r ed s, ordinandone poi gli elementi (date) in senso non decrescente ed eliminando dal vettore gli eventuali elementi che si ripetono
  - ▷ costruendo l'unione (insiemistica) tra gli elementi dei vettori r ed s, che va poi riversata in un vettore, da ordinare in senso strettamente crescente

  $\rightsquigarrow$ la dimensione n del vettore t è tale che $\max\{l, m\} \leq n \leq l + m$
- Si costruiscano poi i vettori x' e y', entrambi di dimensione n, ottenuti aggiungendo degli zeri in corrispondenza degli (eventuali) elementi di t che non stavano già in r o, rispettivamente, in s
- L'operazione finanziaria z/t, con $z = x' + y'$, si definisce somma delle due operazioni finanziarie x/r e y/s

DIFFERENZA TRA DUE DATE (ESPRESSA IN ANNI)

- Siano $t_1 = (g_1, m_1, a_1)$ e $t_2 = (g_2, m_2, a_2)$ due date tali che $t_1 < t_2$ ($\rightsquigarrow a_1 \leq a_2$), e sia gg il numero effettivo di giorni intercorrenti tra le stesse, ovvero la differenza tra t_2 e t_1 espressa in giorni $\rightsquigarrow$ nel conteggio si tiene conto di t_2 ma non di t_1
- Vogliamo ora esprimere tale differenza in anni, essendo l'anno l'usuale unità di misura del tempo
- Esistono allo scopo varie convenzioni $\rightsquigarrow$ day count conventions
  - ▷ ACT/ACT
    - ⋆ se nessun $y : a_1 \leq y \leq a_2$ è bisestile (cioè multiplo di 4), allora $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{365}$
    - ⋆ se $a_1 = a_2$ ed è un anno bisestile, allora $t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{366}$
    - ⋆ se $a_1 < a_2$ ed esiste almeno un y bisestile : $a_1 \leq y \leq a_2$, allora si pone $t_2 - t_1 \doteq d_1 + d_2 + a_2 - a_1 - 1$, dove
      $d_1 = (31, 12, a_1) - (g_1, m_1, a_1)$ (calcolato come descritto prima)
      $d_2 =$ numero di giorni effettivi tra $(31, 12, a_2 - 1)$ e (g_2, m_2, a_2)
      diviso 365 o 366 a seconda che a_2 sia bisestile o no

DIFFERENZA TRA DUE DATE (ESPRESSA IN ANNI)

▷ ACT/360
$t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{360}$

▷ ACT/365
$t_2 - t_1 \doteq \frac{gg}{365}$

▷ 360/360 ($\rightsquigarrow$ anno commerciale)

Tutti i mesi sono considerati di 30 giorni e l'anno di 360:

- ⋆ se $(g_i = 31) \vee$
  $((m_i = 2) \wedge ((a_i \neq \text{bisestile} \wedge g_i = 28) \vee (a_i = \text{bisestile} \wedge g_i = 29)))$
  si pone $g'_i = 30$, altrimenti si pone $g'_i = g_i$, $i = 1, 2$
- ⋆ si definisce $t_2 - t_1 \doteq a_2 - a_1 + \frac{m_2 - m_1}{12} + \frac{g'_2 - g'_1}{360}$

CONVERSIONE DI DATE IN NUMERI

- Fissiamo una data di riferimento $t_0 = (g_0, m_0, a_0)$ che precede tutte quelle che considereremo $\rightsquigarrow$ origine dei tempi
- Definiamo un'applicazione f dall'insieme di tutte le date $t \geq t_0$ all'insieme dei numeri reali non negativi:
  - ▷ $t_0 \xrightarrow{f} 0$
  - ▷ $t > t_0 \xrightarrow{f} t - t_0$ (calcolata utilizzando una delle convenzioni descritte in precedenza)

$\rightsquigarrow$ D'ora innanzi, tutte le date saranno per noi numeri reali ≥ 0

LEGGI FINANZIARIE

- Consideriamo un'operazione finanziaria a pronti, che prevede di ricevere (o pagare) un importo $C > 0$ all'epoca T_1 per restituire (o rispettivamente incassare) M in $T_2 > T_1$
- Di solito si assume $M > C \rightsquigarrow$ postulato di rendimento del denaro
- La differenza $I = M - C$ si chiama interesse e M si chiama montante del capitale C
- Dati C, T_1 e T_2, l'entità di M scaturisce da un accordo tra le parti coinvolte nello scambio; quindi in teoria non è necessario seguire delle regole precise per "calcolarlo"
- In pratica però vengono seguiti degli "schemi" prefissati per il calcolo di M, dati C, T_1 e T_2
- La funzione che ad ogni terna (C, T_1, T_2) (con $C > 0$ e $T_1 < T_2$) associa M viene chiamata funzione di capitalizzazione
- L'applicazione di tale funzione consente quindi di portare avanti importi nel tempo: si parla allora di capitalizzare importi

LEGGI FINANZIARIE

- Simmetricamente, supponiamo di dover ricevere (o pagare) un importo $C > 0$ in un'epoca futura T_1
- L'operazione finanziaria a pronti che ci consente di ricevere (o rispettivamente pagare) anticipatamente, in $T_2 < T_1$, un importo V cancellando il credito (debito) futuro, si chiama operazione di attualizzazione o di sconto
- Per il postulato di rendimento del denaro, si ha $V < C$
- La differenza $D = C - V$ si chiama sconto, l'importo V si chiama invece valore attuale del capitale C
- La funzione che ad ogni terna (C, T_1, T_2) (con $C > 0$ e $T_1 > T_2$) associa V viene chiamata funzione di attualizzazione
- L'applicazione di tale funzione consente quindi di portare indietro importi nel tempo: si parla allora di attualizzare, o scontare, importi

LEGGI FINANZIARIE

- Le leggi finanziarie, di attualizzazione e capitalizzazione, si dicono associate, o coniugate, se, capitalizzando C da T_1 a $T_2 > T_1$ e poi attualizzando il suo montante M da T_2 a T_1 (o, simmetricamente, scontando C da T_1 a $T_2 < T_1$ e poi capitalizzandone il valore attuale V da T_2 a T_1) si riottiene C
  $\rightsquigarrow$ le funzioni di capitalizzazione e attualizzazione, ristrette su ogni coppia di date diverse, sono l'una l'inversa dell'altra
- Le leggi più diffuse nella pratica sono le seguenti:
  - ▷ legge dell'interesse semplice (per durate non superiori all'anno)

    $M = C[1 + i(T_2 - T_1)]$, se $T_1 < T_2$; $\quad V = \frac{C}{1+i(T_1-T_2)}$, se $T_1 > T_2$,

    dove la costante $i > 0$ si chiama tasso d'interesse

    $\rightsquigarrow$ l'interesse $I = M - C$ è proporzionale al capitale iniziale C e alla durata dell'operazione $T_2 - T_1$

    $\rightsquigarrow$ gli interessi sono sempre tenuti separati dal capitale

LEGGI FINANZIARIE

▷ legge dell'interesse composto, o legge esponenziale

$M = C(1+i)^{T_2-T_1} = Ce^{\delta(T_2-T_1)}$, se $T_1 < T_2$;

$V = C(1+i)^{-(T_1-T_2)} = Ce^{-\delta(T_1-T_2)}$, se $T_1 > T_2$,

dove la costante $\delta = \ln(1+i)$ si chiama intensità istantanea d'interesse, o forza d'interesse

⇝ gli interessi vengono capitalizzati istante per istante, cioè diventano a loro volta capitale e concorrono a produrre nuovi interessi

Se postuliamo che il valore di un importo C nell'istante stesso in cui esso è esigibile coincide con C

⇝ il valore (montante o valore attuale) in T_2 di un capitale C esigibile in T_1 è dato da $C(1+i)^{T_2-T_1} = Ce^{\delta(T_2-T_1)}$ qualunque sia l'ordinamento tra le due date T_1 e T_2 (eventualmente anche coincidenti)

PROPRIETÀ DELLE LEGGI FINANZIARIE

- Le due leggi appena descritte godono di due importanti proprietà:

  ▷ omogeneità d'importo
  Sia il montante M che il valore attuale V (e quindi anche l'interesse $I = M - C$ e lo sconto $D = C - V$) sono proporzionali al capitale C

  ⇝ basta allora "inseguire" gli importi unitari

  ⇝ il rapporto tra M e C (o tra V e C) dipende solo dalle due date T_1 e T_2

  Tale rapporto, che indicheremo con $\varphi(T_1,T_2)$, si chiama fattore di scambio, e più precisamente fattore di capitalizzazione, $u(T_1,T_2)$, se $T_2 \geq T_1$, fattore di attualizzazione (o di sconto), $v(T_2,T_1)$, se $T_1 \geq T_2$

  ⇝ se $T_1 = T_2$, si ha $\varphi(T_1,T_1) = u(T_1,T_1) = v(T_1,T_1) = 1$

  ⇝ se le leggi di capitalizzazione e di attualizzazione sono associate si ha che $u(T_1,T_2)v(T_1,T_2) = 1 \ \forall T_1 \leq T_2$.

Proprietà delle leggi finanziarie

- ▷ uniformità nel tempo
  Sia il montante M che il valore attuale V (e quindi anche l'interesse $I = M - C$ e lo sconto $D = C - V$) dipendono solo dalla distanza tra le due date T_1 e T_2 e non dalle stesse singolarmente prese
  - $\rightsquigarrow$ se la legge è anche omogenea d'importo, con un abuso di notazione possiamo indicare con $u(T_2 - T_1)$ e $v(T_1 - T_2)$ i rispettivi fattori di capitalizzazione e attualizzazione, dove $u(0) = v(0) = 1$, e inoltre $u(t)v(t) = 1 \; \forall t \geq 0$ se si opera con leggi associate

Proprietà delle leggi finanziarie

- La legge esponenziale gode inoltre della seguente proprietà, che esprimiamo direttamente tramite il fattore di scambio:
  - ▷ scindibilità
    $\varphi(T_1, T_2)\varphi(T_2, T_3) = \varphi(T_1, T_3) \; \forall T_1, T_2, T_3$
    - $\rightsquigarrow$ se $T_1 \leq T_2 \leq T_3$ e si scinde un'operazione di capitalizzazione da T_1 a T_3 in una che va da T_1 a T_2, reinvestendone il montante fino a T_3, si ottiene lo stesso risultato (montante) che si avrebbe con l'operazione originaria $\rightsquigarrow$ scindibilità prospettiva
    - $\rightsquigarrow$ se $T_1 \geq T_2 \geq T_3$ e si scinde un'operazione di attualizzazione da T_1 a T_3 in una che va da T_1 a T_2, anticipandone poi ulteriormente il valore attuale fino a T_3, si ottiene lo stesso risultato (valore attuale) che si avrebbe con l'operazione originaria $\rightsquigarrow$ scindibilità retrospettiva
    - $\rightsquigarrow$ si ottiene lo stesso risultato finale se si scinde in due un'operazione di capitalizzazione o di attualizzazione da T_1 a T_3 anche se l'epoca di "transito" T_2 non è intermedia fra le due

    Si prova che la legge esponenziale è l'unica scindibile tra quelle contemporaneamente omogenee d'importo e uniformi nel tempo

SIMBOLI COMUNEMENTE UTILIZZATI

- Mettiamoci nell'ambito di una legge finanziaria omogenea d'importo e uniforme nel tempo, e supponiamo di lavorare con leggi di capitalizzazione e di attualizzazione associate
- Spesso si riserva il termine fattore di capitalizzazione e, rispettivamente, di attualizzazione ai seguenti simboli:
  - ▷ $u \doteq u(1) = 1 + i$
    - ⇝ montante di un'unità monetaria dopo un anno
    - ⇝ in particolare, nel regime esponenziale $u = e^{\delta}$
  - ▷ $v \doteq v(1) = \frac{1}{u}$
    - ⇝ valore attuale di un'unità monetaria esigibile fra un anno
    - ⇝ in particolare, nel regime esponenziale $v = e^{-\delta}$
- Inoltre, si pone
  - ▷ $d \doteq 1 - v =$ tasso di sconto
    - ⇝ sconto su un'unità monetaria anticipata di un anno
- Osservando che $d = iv$ ⇝ valore attuale di i anticipato di un anno, d si chiama anche tasso d'interesse anticipato

TASSI EQUIVALENTI

- Finora abbiamo assunto come unità di misura del tempo l'anno, e tutte le quantità finora incontrate (tasso d'interesse i, tasso di sconto d, intensità istantanea d'interesse δ, fattore di capitalizzazione u, fattore di attualizzazione v) sono state definite su base annua. E' tuttavia interessante capire cosa succede se invece si assume un'unità di misura diversa
- In particolare, siamo interessati al caso in cui l'unità di misura del tempo è il k-esimo d'anno, con k intero positivo (semestre se $k = 2$, quadrimestre se $k = 3$, trimestre se $k = 4$, bimestre se $k = 6$, mese se $k = 12$, ...)
- Per convenzione, indichiamo con k le quantità finora incontrate, se riferite al k-esimo d'anno

TASSI EQUIVALENTI

- Concentriamoci, in particolare, sui tassi, e diamo la seguente definizione: *Due tassi, riferiti ad unità di misura diverse del tempo, si dicono equivalenti se, in un fissato regime e con riferimento allo stesso intervallo di tempo, producono lo stesso interesse* (o, equivalentemente, lo stesso montante, o valore attuale) *a partire dallo stesso capitale*
- Supponiamo di voler passare, per semplicità, da tassi relativi a frazioni d'anno ($k > 1$) a tassi annui (o viceversa), perché se volessimo invece passare dal tasso i_k al tasso i_h con $k \neq h$ e h, k entrambi maggiori di 1, basterebbe passare da i_k a i e poi da i a i_h
- Consideriamo capitali unitari tanto lavoriamo con leggi omogenee d'importo (e uniformi nel tempo)

TASSI EQUIVALENTI

- Sia $t > 0$ la misura in anni di un generico intervallo di tempo
  $\rightsquigarrow$ la misura dello stesso intervallo, in k-esimi d'anno, sarà $k \cdot t$
  - ▷ regime dell'interesse semplice
    $1 + it = 1 + i_k kt \quad \Rightarrow \quad i = ki_k$ o, equivalentemente, $i_k = \frac{i}{k}$
  - ▷ regime dell'interesse composto
    $(1+i)^t = (1+i_k)^{kt} \Rightarrow i = (1+i_k)^k - 1$ o, equiv., $i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}} - 1$

    Se volessimo lavorare con le intensità, si avrebbe invece:
    $e^{\delta t} = e^{\delta_k kt} \quad \Rightarrow \quad \delta = k\delta_k$ o, equivalentemente, $\delta_k = \frac{\delta}{k}$
- Si definisce tasso nominale convertibile k volte l'anno $j_k = ki_k$
  $\rightsquigarrow j_k = i$ nel regime dell'interesse semplice
  $\rightsquigarrow j_k = k\left[(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1\right]$ nel regime dell'interesse composto
- In particolare, nel regime dell'interesse composto i tassi j_k sono decrescenti rispetto a k, ed inoltre

$$\lim_{k \to +\infty} j_k = \lim_{k \to +\infty} \frac{(1+i)^{\frac{1}{k}} - 1}{\frac{1}{k}} = \ln(1+i) = \delta$$

Operazioni finanziarie nel regime esponenziale

- D'ora innanzi opereremo nel regime esponenziale, con leggi di capitalizzazione e attualizzazione associate
- Consideriamo una generica operazione finanziaria $(S_1, S_2, \ldots, S_n)/(T_1, T_2, \ldots, T_n)$ con $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots < T_n$
- Fissiamo un'intensità di valutazione δ (o, equiv., un tasso i)
- Si definisce saldo, o valore, dell'operazione in $T \geq 0$ la quantità

$$W(T) = \sum_{j=1}^{n} S_j e^{\delta(T-T_j)}$$

- L'operazione si definisce equa se $W(T) = 0$

  $\rightsquigarrow$ per la scindibilità, $W(T) = W(T')e^{\delta(T-T')}\ \forall T' \neq T$

  $\rightsquigarrow$ $W(T) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad W(T') = 0\ \forall T' \neq T$

  $\rightsquigarrow$ se l'operazione è equa in T, lo è in qualunque altra data

Montante e Fabbisogno

- Si definisce montante dell'operazione in $T \geq 0$ la quantità

$$M(T) = \sum_{j:T_j \leq T} (-S_j) e^{\delta(T-T_j)}$$

- Si definisce fabbisogno dell'operazione in $T \geq 0$ la quantità

$$V(T) = \sum_{j:T_j > T} S_j e^{-\delta(T_j-T)}$$

  $\rightsquigarrow$ $M(T) = [dato - avuto]$ (come la riserva matematica retrospettiva nelle assicurazioni vita)

  $\rightsquigarrow$ $V(T) = [avere - dare]$ (come la riserva matematica prospettiva nelle assicurazioni vita)

  $\rightsquigarrow$ $W(T) = -M(T) + V(T)$

  $\rightsquigarrow$ l'operazione è equa $\Leftrightarrow$ $M(T) = V(T)$

RENDITE E OPERAZIONI DI RENDITA

- Una sequenza di importi $R_1, R_2, \ldots, R_n$, tutti dello stesso segno (in particolare li supporremo positivi) esigibili alle epoche usualmente equidistanzate $T_1, T_2, \ldots, T_n$ (con $0 \leq T_1 < T_2 < \cdots < T_n$), costituisce una rendita
- Gli importi R_j si chiamano rate, o termini, della rendita; le epoche T_j sono le scadenze
- Per operazione di rendita si intende un'operazione finanziaria che prevede lo scambio di un unico importo, di solito all'inizio o al termine della stessa, contro una rendita

OPERAZIONI DI RENDITA

- ESEMPI
  - ▷ operazione di ammortamento di un debito

$$\begin{array}{ccccc} V & -R_1 & -R_2 & \ldots & -R_n \\ \hline T_0 & T_1 & T_2 & \cdots & T_n \end{array}$$

  - ▷ operazione di costituzione di un capitale

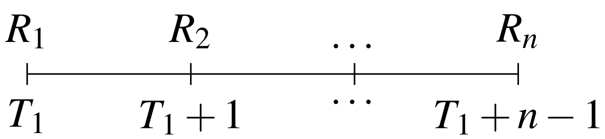
$$\begin{array}{ccccc} -R_1 & -R_2 & \ldots & -R_n & M \\ \hline T_1 & T_2 & \cdots & T_n & T \end{array}$$

VALORE ATTUALE, DURATION E MONTANTE

- Data una rendita di rate $R_1, R_2, \dots, R_n$ esigibili in $T_1, T_2, \dots, T_n$ e fissata un'intensità di valutazione δ, si definisce
  - ▷ valore attuale della rendita in $T_0 \leq T_1$:
    $$V = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{-\delta(T_j - T_0)}$$
  - ▷ duration della rendita in $T_0 \leq T_1$:
    $$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} T_j R_j \mathrm{e}^{-\delta(T_j - T_0)}}{V}$$
    ⇝ per calcolare valore attuale e duration prenderemo sempre $T_0 = 0$, sottintendendo l'epoca di valutazione
  - ▷ montante della rendita in $T \geq T_n$:
    $$M = \sum_{j=1}^{n} R_j \mathrm{e}^{\delta(T - T_j)}$$
    ⇝ a seconda del tipo di rendita, noi prenderemo sempre $T = T_n$ o $T = T_n + \Delta$, dove Δ è la comune distanza tra due date consecutive $T_j - T_{j-1}$, sottintendendo l'epoca di valutazione

CLASSIFICAZIONE DELLE RENDITE

- D'ora innanzi assumeremo come unità di misura del tempo la (comune) distanza tra due scadenze consecutive di una rendita $T_j - T_{j-1}$, per cui $\Delta = 1$, e supporremo di operare con tassi (o intensità, o fattori di capitalizzazione/attualizzazione) corrispondenti a questa unità di misura, anche se per comodità useremo i simboli precedentemente introdotti per i tassi annui
  ⇝ Possiamo quindi rappresentare la rendita come segue:



  - ▷ Se l'unità di misura è l'anno, la rendita si dice annua, se è il semestre si dice semestrale, ..., il mese si dice mensile, ... Le rendite finora considerate sono discrete. Si può anche considerare il caso teorico di una rendita con pagamenti nel continuo ⇝ rendita continua

Classificazione delle rendite

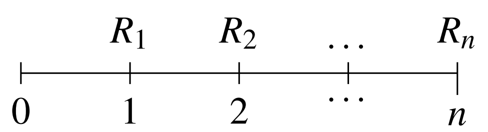
- ▷ Le rendite finora considerate prevedono un numero finito, n, di rate, e si chiamano rendite temporanee n anni (o n semestri, ...); se il numero di rate è invece infinito, si ha a che fare con una rendita perpetua, o perpetuità

- ▷ La rendita è anticipata, se la rata di competenza dell'intervallo $[T_j, T_j+1]$ viene pagata all'inizio dell'intervallo, cioè in $T_j\ \forall j$; posticipata se invece tale rata viene pagata alla fine, cioè in T_j+1

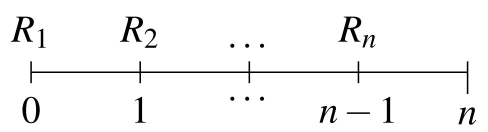
- ▷ La rendita è immediata se la prima rata è pagata nel primo intervallo di tempo ($T_1 = 0$ se anticipata, $T_1 = 1$ se posticipata), differita se invece tale rata viene pagata successivamente ($T_1 > 0$ se anticipata, $T_1 > 1$ se posticipata)

Classificazione delle rendite

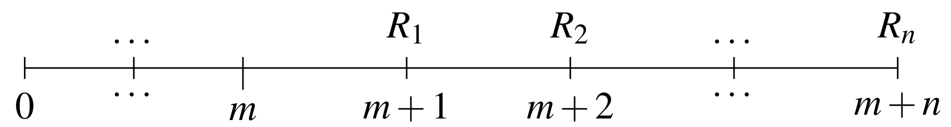
- ESEMPI
  - ▷ rendita temporanea n periodi, immediata, posticipata



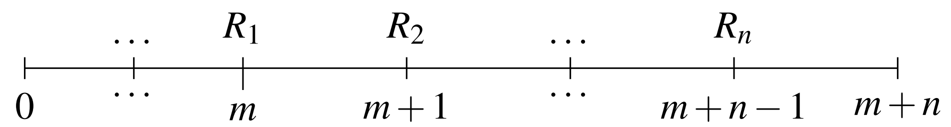
  - ▷ rendita temporanea n periodi, immediata, anticipata



  - ▷ rendita temporanea n periodi, posticipata, differita di m periodi



  - ▷ rendita temporanea n periodi, anticipata, differita di m periodi



Valori attuali e Montanti di rendite

- Ci occupiamo ora di calcolare il valore attuale e il montante di una rendita con rate "regolari" (ad es. costanti, crescenti o decrescenti in progressione aritmetica o geometrica)
- Il valore attuale sarà sempre calcolato all'epoca 0
  $\rightsquigarrow$ l'epoca di valutazione è pari a quella di pagamento della prima rata per le rendite immediate anticipate, a un periodo prima per le rendite immediate posticipate
- Il montante sarà sempre calcolato all'epoca $m+n$ per le rendite di n rate differite di m periodi (immediate se $m=0$)
  $\rightsquigarrow$ l'epoca di valutazione è pari a quella di pagamento dell'ultima rata per le rendite posticipate, a un periodo dopo per le rendite anticipate

Rendite a rata costante

- Per l'omogeneità d'importo possiamo limitarci a calcolare il valore attuale o il montante di una rendita a rata costante unitaria
  - ▷ valore attuale di una rendita unitaria, immediata e temporanea n

$$\text{posticipata } a_{\overline{n}|i} = \sum_{j=1}^{n} v^j = \frac{1-v^n}{i}$$

$$\text{anticipata } \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \sum_{j=0}^{n-1} v^j = u a_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i} = \frac{1-v^n}{d}$$

  - ▷ valore attuale di una rendita unitaria, immediata e perpetua

$$\text{posticipata } a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to+\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}$$

$$\text{anticipata } \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to+\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|i} = \frac{1}{d}$$

poiché $0 < v = \frac{1}{1+i} < 1$

Rendite a rata costante

▷ valore attuale di una rendita unitaria, differita di m periodi e temporanea n

$$\text{posticipata } {}_{m/}a_{n\rceil i} = \sum_{j=m+1}^{m+n} v^j = v^m a_{n\rceil i} = a_{m+n\rceil i} - a_{m\rceil i}$$

$$\text{anticipata } {}_{m/}\ddot{a}_{n\rceil i} = \sum_{j=m}^{m+n-1} v^j = v^m \ddot{a}_{n\rceil i} = \ddot{a}_{m+n\rceil i} - \ddot{a}_{m\rceil i}$$

▷ valore attuale di una rendita unitaria, differita di m periodi e perpetua

$$\text{posticipata } {}_{m/}a_{\infty\rceil i} = v^m a_{\infty\rceil i} = a_{\infty\rceil i} - a_{m\rceil i}$$

$$\text{anticipata } {}_{m/}\ddot{a}_{\infty\rceil i} = v^m \ddot{a}_{\infty\rceil i} = \ddot{a}_{\infty\rceil i} - \ddot{a}_{m\rceil i}$$

Rendite a rata costante

▷ montante di una rendita unitaria, immediata e temporanea n

$$\text{posticipata } s_{n\rceil i} = \sum_{j=1}^{n} u^{n-j} = u^n a_{n\rceil i} = \frac{u^n - 1}{i}$$

$$\text{anticipata } \ddot{s}_{n\rceil i} = \sum_{j=0}^{n-1} u^{n-j} = u^n \ddot{a}_{n\rceil i} = \frac{u^n - 1}{d}$$

▷ montante di una rendita unitaria, differita di m periodi e temporanea n

$$\text{posticipata } {}_{m/}s_{n\rceil i} = \sum_{j=m+1}^{m+n} u^{m+n-j} = s_{n\rceil i}$$

$$\text{anticipata } {}_{m/}\ddot{s}_{n\rceil i} = \sum_{j=m}^{m+n-1} u^{m+n-j} = \ddot{s}_{n\rceil i}$$

▷ Ovviamente non esiste il montante di una rendita perpetua (sarebbe ∞) poiché $u = 1 + i > 1$

RENDITE FRAZIONATE

- Nella pratica, anche se la periodicità di pagamento delle rate non è annua, viene dichiarata la rata annua, ad es. unitaria, che viene frazionata in $k > 1$ rate pari a $\frac{1}{k}$ pagabili all'inizio o alla fine di ciascun k-esimo d'anno
- Per fissare le idee, concentriamoci sul valore attuale di una rendita immediata di n rate annue unitarie frazionate in nk rate di $\frac{1}{k}$ pagabili posticipatamente k volte l'anno, dal momento che sussistono i precedenti legami con il rispettivo montante, nonché con valori attuali e montanti di rendite immediate anticipate e di rendite differite
- Per non fare confusione, nel simbolo del valore attuale omettiamo di indicare il tasso, perché quello che viene di solito dichiarato non è il tasso annuo i bensì il tasso nominale convertibile k volte all'anno j_k

RENDITE FRAZIONATE

- Si ha:

$$a^{(k)}_{n\rceil} = \frac{1}{k}\sum_{j=1}^{nk} v_k^j = \frac{1}{k} a_{nk\rceil i_k} = \frac{1}{k} \cdot \frac{1-v_k^{nk}}{i_k} = \frac{1-v^n}{j_k} = \frac{i}{j_k} a_{n\rceil i},$$

dove $i_k = (1+i)^{\frac{1}{k}-1}$ e $v_k = \frac{1}{1+i_k}$

$\rightsquigarrow$ Se $k > 1$ allora $a^{(k)}_{n\rceil} > a_{n\rceil i}$ poiché $j_k < i$

Rendite frazionate

- Casi limite:
  - ▷ valore attuale di una rendita perpetua, frazionata, immediata e posticipata

$$a^{(k)}_{\infty\rceil} = \lim_{n\to+\infty} a^{(k)}_{n\rceil} = \frac{1}{j_k}$$

  - ▷ valore attuale di una rendita continua, temporanea e immediata

$$\bar{a}_{n\rceil} = \lim_{k\to+\infty} a^{(k)}_{n\rceil} = \frac{1-v^n}{\delta}$$

    - ⇝ se la rendita è continua non c'è distinzione tra anticipata e posticipata
    - ⇝ allo stesso risultato si poteva pervenire calcolando

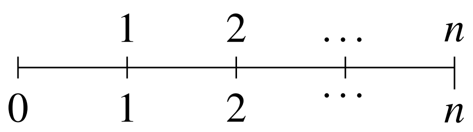
$$\bar{a}_{n\rceil} = \int_0^n \mathrm{e}^{-\delta t}\mathrm{d}t$$

  - ▷ valore attuale di una rendita continua, immediata e perpetua

$$\bar{a}_{\infty\rceil} = \lim_{n\to+\infty} \bar{a}_{n\rceil} = \frac{1}{\delta}$$

Rendite con rate in progressione aritmetica

- Anche qui concentriamoci esclusivamente sul calcolo del valore attuale di rendite immediate posticipate
- Consideriamo dapprima la seguente rendita, detta increasing:



in cui la ragione della progressione è unitaria e coincide con la prima rata

- Il suo valore attuale è pari a

$$(Ia)_{n\rceil i} = \sum_{j=1}^{n} j v^j = \frac{\ddot{a}_{n\rceil i} - n v^n}{i}$$

⇝ se la rendita è perpetua si ha

$$(Ia)_{\infty\rceil i} = \lim_{n\to+\infty} (Ia)_{n\rceil i} = \frac{1}{id} = \frac{1+i}{i^2} \quad \text{poiché} \quad \lim_{n\to+\infty} n v^n = 0$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

⇝ duration di una rendita a rata costante unitaria, immediata, posticipata:

- ▷ temporanea n periodi

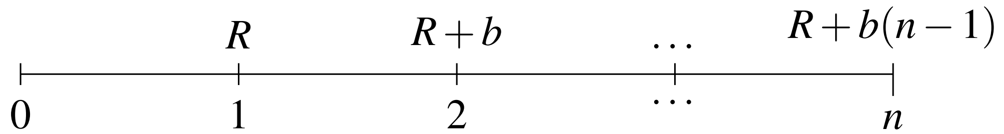
$$D = \frac{\sum_{j=1}^{n} j v^j}{\sum_{j=1}^{n} v^j} = \frac{(Ia)_{\overline{n}|i}}{a_{\overline{n}|i}}$$

- ▷ perpetua

$$D = \frac{(Ia)_{\overline{\infty}|i}}{a_{\overline{\infty}|i}} = \ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{d}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE ARITMETICA

- Se la prima rata R e la ragione della progressione $b > -\frac{R}{n-1}$ differiscono,



ci si può sempre ricondurre al caso precedente, con valore attuale dato da

$$V = \sum_{j=1}^{n} [R + (b-1)j] v^j = (R-b) a_{\overline{n}|i} + b (Ia)_{\overline{n}|i}$$

RENDITE CON RATE IN PROGRESSIONE GEOMETRICA

- Sia R la prima rata e $b > 0$ la ragione della progressione:

$$\begin{array}{ccccc} & R & Rb & \dots & Rb^{n-1} \\ \hline 0 & 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

- Con semplici calcoli si perviene a

$$V = \sum_{j=1}^{n} Rb^{j-1}v^j = \begin{cases} Rv\frac{1-(bv)^n}{1-bv} & \text{se } b \neq 1+i \\ Rvn & \text{se } b = 1+i \end{cases}$$

$\rightsquigarrow$ si tratta del valore attuale di una rendita a rata costante Rv immediata, anticipata, in cui il fattore di attualizzazione è pari a bv ($\rightsquigarrow$ tasso di valutazione $= \frac{1}{bv} - 1$)

AMMORTAMENTI

- Ci occupiamo ora delle modalità in base a cui viene restituito un debito
- Più precisamente, quando un debitore prende a prestito un capitale C da un creditore, nel contratto di mutuo vengono precisate tutte le modalità che regolano la restituzione del capitale e la corresponsione degli interessi
- Tali modalità vengono descritte in quello che si chiama piano di ammortamento del debito
- Almeno in un primo momento, consideriamo prestiti a tasso fisso (e costante nel tempo)
- Sia 0 l'epoca di stipulazione del contratto e supponiamo che la restituzione del capitale avvenga tramite la corresponsione di $n+1$ rate $R_0, R_1, \dots, R_n$ alle epoche (ordinate) $T_0 = 0, T_1, \dots, T_n$ (eventualmente la prima rata potrebbe essere nulla)

AMMORTAMENTI

- Il tasso d'interesse che rende equa l'operazione di ammortamento (scambio del capitale C contro la rendita di rate $R_0, \ldots, R_n$) si chiama tasso di remunerazione, o tasso tecnico
- Si chiama condizione di chiusura finanziaria dell'operazione la condizione che esprime l'equità della stessa all'epoca 0 e al tasso tecnico, indicato con i:

$$C = \sum_{j=0}^{n} R_j v^{T_j} = \sum_{j=0}^{n} R_j \left(\frac{1}{1+i}\right)^{T_j}$$

- Tutte le rate sono formate da due componenti: la quota capitale (o quota di ammortamento del debito) C_j, e la quota interessi I_j

$$R_j = C_j + I_j, \ \ j = 0, 1, \ldots, n, \quad \text{con} \ \ C_0 = 0$$

- Deve valere inoltre la condizione di chiusura elementare:

$$C = \sum_{j=1}^{n} C_j$$

AMMORTAMENTI

- Se tutte le rate (eccetto R_0) contengono una quota capitale strettamente > 0, l'ammortamento si dice progressivo
- Usualmente i mutui concessi a privati (ad es. per l'acquisto della casa) sono progressivi, ma talvolta sono preceduti da una fase iniziale di preammortamento, in cui si pagano solo gli interessi, oppure l'ammortamento parte con ritardo e nella fase iniziale non si pagano nemmeno gli interessi $\rightsquigarrow$ in quest'ultimo caso il debito aumenta anziché diminuire
- Lo stato, gli enti pubblici e le società usano invece indebitarsi tramite l'emissione di obbligazioni e con ammortamenti non progressivi, restituendo in blocco l'intero capitale a scadenza $\rightsquigarrow$ unica quota capitale a scadenza. Gli interessi sono pagati:
  - ▷ in blocco alla stipula del contratto (ad es. BOT e CTZ)
  - ▷ in blocco alla scadenza T_n, insieme al capitale (ad es. BFP)
  - ▷ posticipatamente, alla fine di ogni intervallo $[T_{j-1}, T_j]$ (ad es. semestre, per i BTP)
  - ▷ anticipatamente, all'inizio di ogni intervallo $[T_{j-1}, T_j]$

AMMORTAMENTI PROGRESSIVI

- Definiamo debito residuo in T_j la seguente quantità:

$$Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h, \quad j = 0, 1, \dots, n-1$$

$\rightsquigarrow$ $Q_0 = C$ (chiusura elementare). Poniamo inoltre $Q_n = 0$

- Come detto precedentemente, ogni rata R_j contiene una quota capitale C_j e una quota interessi I_j, che maturano sul debito residuo.
- In particolare, gli interessi relativi all'intervallo di tempo $[T_{j-1}, T_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$, possono essere pagati posticipatamente alla fine dell'intervallo (quota interessi I_j) oppure anticipatamente all'inizio dello stesso (quota interessi I_{j-1}). Si parla allora di ammortamenti a interessi posticipati oppure, rispettivamente, a interessi anticipati

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- D'ora innanzi, per semplicità, supporremo che le date T_j siano equidistanziate, assumendo come unità di misura del tempo la comune distanza tra due date consecutive $\rightsquigarrow$ $T_j = j \ \forall j$, e i tassi (o fattori) utilizzati, in particolare il tasso tecnico i, saranno coerenti con tale unità di misura nel regime esponenziale
- La quota interessi I_j, pagata posticipatamente, coincide con gli interessi maturati in j sul debito residuo Q_{j-1} e relativi all'intervallo di tempo $[j-1, j]$ $\rightsquigarrow$ $I_j = iQ_{j-1}, j = 1, 2, \dots, n$
- Si può dimostrare che $Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h, \ j = 0, 1, \dots, n-1 \Leftrightarrow$ $Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j}, \ j = 0, 1, \dots, n-1$ (dove $v = \frac{1}{1+i}$)

  $\rightsquigarrow$ il debito residuo è il fabbisogno dell'operazione di ammortamento dal punto di vista del creditore

  $\rightsquigarrow$ il caso particolare $j = 0$ fornisce l'equivalenza tra chiusura elementare e chiusura finanziaria

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- La seguente tabella descrive il piano di ammortamento di un debito a interessi posticipati e scadenze equidistanziate

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	$-$	$-$	$-$	C
1	$I_1 + C_1$	iQ_0	C_1	$Q_0 - C_1$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	$I_j + C_j$	iQ_{j-1}	C_j	$Q_{j-1} - C_j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	$(1+i)C_n$	iC_n	C_n	0

AMMORTAMENTI A INTERESSI POSTICIPATI

- ESEMPI
  - ▷ Quote capitale costanti (ammortamento italiano)
    - $\Rightarrow$ per la condizione di chiusura elementare $C_j = \frac{C}{n}$, $j = 1, \dots, n$
    - $\Rightarrow$ $Q_j = \frac{C}{n}(n-j), \; j = 0, \dots, n$
    - $\rightsquigarrow$ il debito residuo decresce in progressione aritmetica di ragione $\frac{C}{n}$
    - $\Rightarrow$ $I_j = i\frac{C}{n}(n-j+1), \; j = 1, \dots, n$
    - $\Rightarrow$ $R_j = \frac{C}{n}[1 + i(n-j+1)], \; j = 1, \dots, n$
    - $\rightsquigarrow$ sia le quote interessi che le rate decrescono in progressione aritmetica di ragione $i\frac{C}{n}$

Ammortamenti a interessi posticipati

▷ Rate costanti (ammortamento francese)

⇒ per la condizione di chiusura finanziaria

$$R_j \doteq R = \frac{C}{a_{n\rceil i}}, \; j = 1, \ldots, n$$

⇒ $Q_j = R a_{n-j\rceil i}, \; j = 0, \ldots, n-1$

⇒ $I_j = i Q_{j-1} = R\left(1 - v^{n-j+1}\right), \; j = 1, \ldots, n$

⇒ $C_j = R - I_j = R v^{n-j+1}, \; j = 1, \ldots, n$

⇝ le quote capitale crescono in progressione geometrica di ragione $1+i$

Ammortamenti a interessi anticipati

- Gli interessi maturati in $j+1$ sul debito residuo Q_j e relativi all'intervallo di tempo $[j, j+1]$, pari a iQ_j, vengono pagati anticipatamente in j

  ⇝ la quota interessi $I_j = i Q_j v = d Q_j, \; j = 0, 1, \ldots, n-1$

- Si può dimostrare che $Q_j = \sum_{h=j+1}^{n} C_h, \; j = 0, 1, \ldots, n-1$
  $\Leftrightarrow \; Q_j(1-d) = \sum_{h=j+1}^{n} R_h v^{h-j}, \; j = 0, 1, \ldots, n-1$

  ⇝ il debito residuo scontato $Q_j(1-d) = Q_j v$ è il fabbisogno dell'operazione di ammortamento per il creditore

  ⇝ il caso particolare $j = 0$ fornisce l'equivalenza tra chiusura elementare e chiusura finanziaria

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

- La seguente tabella descrive il piano di ammortamento di un debito a interessi anticipati e scadenze equidistanziate

j	R_j	I_j	C_j	Q_j
0	I_0	dQ_0	$-$	C
1	I_1+C_1	dQ_1	C_1	Q_0-C_1
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
j	I_j+C_j	dQ_j	C_j	$Q_{j-1}-C_j$
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$
n	C_n	$-$	C_n	0

AMMORTAMENTI A INTERESSI ANTICIPATI

- ESEMPIO
  - ▷ Quote capitale costanti (ammortamento tedesco)
    - $\Rightarrow$ per la condizione di chiusura elementare $C_j = \frac{C}{n}$, $j = 1, \dots, n$
    - $\Rightarrow$ $Q_j = \frac{C}{n}(n-j),\ j = 0, \dots, n$
    - $\rightsquigarrow$ il debito residuo decresce in progressione aritmetica di ragione $\frac{C}{n}$
    - $\Rightarrow$ $I_j = d\frac{C}{n}(n-j),\ j = 0, \dots, n-1$
    - $\rightsquigarrow$ le quote interessi decrescono in progressione aritmetica di ragione $d\frac{C}{n}$
    - $\Rightarrow$ $R_j = \frac{C}{n}[1+d(n-j)],\ j = 0, \dots, n$
    - $\rightsquigarrow$ anche le rate, dalla seconda in poi, decrescono in progressione aritmetica di ragione $d\frac{C}{n}$

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Consideriamo un contratto di mutuo stipulato all'epoca 0 che prevede l'ammortamento del capitale tramite la corresponsione delle rate $R_j = C_j + I_j,\ \ j = 0, 1, \dots n$, esigibili alle epoche $0 = T_0 < T_1 < \cdots < T_n$. Ricordiamo che $C_0 = 0$. Inoltre $I_0 = 0$ ($\rightsquigarrow R_0 = 0$) se l'ammortamento è a interessi posticipati, $I_n = 0$ se a interessi anticipati
- Sia $T : 0 \leq T < T_n$. Definiamo, in T, le seguenti quantità:

valore residuo $$V(T) = \sum_{j:T_j > T} R_j v_*^{T_j - T}$$

usufrutto $$U(T) = \sum_{j:T_j > T} I_j v_*^{T_j - T}$$

nuda proprietà $$P(T) = \sum_{j:T_j > T} C_j v_*^{T_j - T}$$

dove $v_* = \frac{1}{1+i_*}$ = fattore di attualizzazione al tasso di valutazione i_* (non necessariamente coincidente con i)

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

$\rightsquigarrow$ la valutazione degli impegni futuri ha interesse, ad es., nel caso in cui si voglia negoziare il debito/credito (il creditore può vendere i suoi crediti futuri, il debitore può estinguere anticipatamente il debito)

$\rightsquigarrow$ il tasso di valutazione i_* riflette le condizioni prevalenti del mercato al momento della negoziazione

$\rightsquigarrow$ può avere interesse la scomposizione del valore residuo in usufrutto e nuda proprietà per motivi fiscali, perché gli interessi passivi sono detraibili dalle tasse

$\rightsquigarrow$ $V(T) = U(T) + P(T)$

$\rightsquigarrow$ se $T_j \leq T < T_{j+1}\ j = 0, 1, \dots n-1$, per la scindibilità della legge esponenziale si possono valutare le precedenti quantità in T_j e poi capitalizzarle fino a T, moltiplicandole per $(1+i_*)^{T-T_j}$

$\rightsquigarrow$ d'ora innanzi indicheremo con V_j, U_j, P_j valore residuo, usufrutto e nuda proprietà in T_j, $j = 0, 1, \dots n-1$

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Per semplicità rimettiamoci nel caso di scadenze equidistanziate $T_j = j,\ j = 0, 1, \ldots, n$
  $\rightsquigarrow$ negli ammortamenti a interessi posticipati $V_j \geq Q_j \iff i_* \leq i$
  $\rightsquigarrow$ negli ammortamenti a interessi anticipati $V_j \geq Q_j v \iff i_* \leq i$

- ESEMPI
  - ▷ nell'ammortamento francese è immediato calcolare il valore residuo, visto che le rate sono costanti, e si può agevolmente calcolare anche la nuda proprietà, sfruttando il fatto che le quote capitale sono crescenti in progressione geometrica
  - ▷ negli ammortamenti italiano e tedesco è immediato calcolare la nuda proprietà, visto che le quote capitale sono costanti, e si può agevolmente calcolare anche l'usufrutto (o il valore residuo), sfruttando il fatto che le quote interessi (o, rispettivamente, le rate) sono decrescenti in progressione aritmetica

VALUTAZIONE DEGLI IMPEGNI FUTURI

- Tuttavia, negli ammortamenti a interessi posticipati (e scadenze equidistanziate) c'è un modo ancora più facile per calcolare alcune delle grandezze coinvolte. Si tratta della Formula di Makeham, che collega fra loro i valori di usufrutto, debito residuo e nuda proprietà (o, rispettivamente, valore residuo, debito residuo e nuda proprietà):

$$U_j = \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j) \quad \Rightarrow \quad V_j = P_j + \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j), \quad j = 0, \ldots, n-1$$

- ESEMPI DI APPLICAZIONE
  - ▷ nell'ammortamento italiano è immediato calcolare $Q_j = \frac{C}{n}(n-j)$ e $P_j = \frac{C}{n} a_{\overline{n-j}|i_*}$ $\rightsquigarrow$ da qui si può subito ricavare $U_j = \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j)$
  - ▷ nell'ammortamento francese è immediato calcolare $Q_j = R a_{\overline{n-j}|i}$ e $V_j = R a_{\overline{n-j}|i_*}$ $\rightsquigarrow$ da qui si può ricavare P_j esplicitandola dall'equazione $V_j = P_j + \frac{i}{i_*}(Q_j - P_j)$

Criterio del Valore Attuale Netto

- Consideriamo un'operazione finanziaria certa, a pronti ($x_0 \neq 0$) o a termine ($x_0 = 0$), contrattata all'epoca $T_0 = 0$:

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdash & + & + & + & \dashv \\ T_0 & T_1 & T_2 & \dots & T_n \end{array}$$

- Fissiamo un tasso di valutazione i e consideriamo il saldo dell'operazione all'epoca $T = 0$ $\rightsquigarrow$ esso dipende dalla scelta di i
- A differenza di prima, sottintendiamo ora l'epoca di valutazione e scriviamo esplicitamente la dipendenza dal tasso:

$$W(i) = \sum_{j=0}^{n} x_j v^{T_j}, \quad \text{dove } \ v = \frac{1}{1+i}$$

- Questa quantità si chiama anche Valore Attuale Netto (VAN), o Discounted Cash Flow (DCF) dell'operazione
  $\rightsquigarrow$ netto in quanto, a differenza di prima, vi includiamo anche l'eventuale importo x_0 esigibile in 0

Criterio del Valore Attuale Netto

- L'operazione si definisce vantaggiosa, equa o svantaggiosa al tasso i se, rispettivamente risulta $W(i) > 0$, $W(i) = 0$, $W(i) < 0$
  $\rightsquigarrow$ le operazioni accettabili saranno quelle non svantaggiose, per cui $W(i) \geq 0$

- Fra diverse operazioni alternative accettabili si preferisce quella con VAN maggiore $\rightsquigarrow$ il criterio si può applicare a qualunque operazione finanziaria, di investimento o finanziamento o mista, ma chiaramente ha senso il confronto solo se le operazioni sono "sufficientemente omogenee" (ad es., se ho bisogno di un mutuo confronterò solo operazioni di finanziamento di durata simile, se voglio investire del denaro solo operazioni di investimento, ...)

Criterio del Tasso Interno di Rendimento

- Si definisce Tasso Interno di Rendimento (TIR) dell'operazione quel tasso i, se esiste unico nell'intervallo I, che rende equa l'operazione stessa
  - ▷ di solito si prende $I=(0,+\infty)$ (postulato di rendimento del denaro) o, al limite, $I=[0,+\infty)$
  - ▷ se si ammette la possibilità di tassi negativi (come avviene in questi ultimi tempi) si prende $I=(-1,+\infty)$, in modo che i fattori di capitalizzazione e attualizzazione risultino comunque positivi ($\rightsquigarrow$ posso anche rimetterci, ma mai l'intero capitale!)

  $\rightsquigarrow$ il TIR di un'operazione di ammortamento è il tasso tecnico
- Fra diverse operazioni alternative che ammettono TIR si preferisce quella con TIR maggiore se trattasi di operazioni di investimento, quella con TIR minore se trattasi invece di operazioni di finanziamento, se non è chiara la natura delle operazioni esse sono non confrontabili in base al criterio del TIR

  $\rightsquigarrow$ anche qui ha senso il confronto solo fra operazioni omogenee in quanto a durata, entità degli importi coinvolti, etc.

Metodi di ricerca del TIR

- Non tutte le operazioni finanziarie ammettono TIR
- Se l'operazione è di puro investimento e prevede un unico esborso iniziale $c_0=-x_0>0$, seguito da una serie di introiti $x_j>0$, $j=1,2,\ldots,n$, tali che $\sum_{j=1}^{n} x_j > c_0$, allora esiste unico un tasso $i>0$ tale che $W(i)=0$

  $\rightsquigarrow$ infatti, W è funzione continua sull'intervallo $(0,+\infty)$; inoltre:

$$\lim_{i\to 0} W(i) = -c_0 + \sum_{j=1}^{n} x_j > 0, \qquad \lim_{i\to+\infty} W(i) = -c_0 < 0$$

  $\rightsquigarrow$ per il Teorema degli zeri W ammette almeno uno zero, che è unico in quanto essa è strettamente decrescente ($W'(i)<0$)

METODI DI RICERCA DEL TIR

- Simmetricamente, se l'operazione è di puro finanziamento e prevede un unico introito iniziale $x_0 > 0$, seguito da una serie di esborsi $c_j = -x_j > 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, tali che $\sum_{j=1}^{n} c_j > x_0$, allora esiste unico un tasso $i > 0$ tale che $W(i) = 0$
  $\rightsquigarrow$ infatti, W è funzione continua sull'intervallo $(0, +\infty)$; inoltre:

$$\lim_{i \to 0} W(i) = x_0 - \sum_{j=1}^{n} c_j < 0, \qquad \lim_{i \to +\infty} W(i) = x_0 > 0$$

  $\rightsquigarrow$ per il Teorema degli zeri W ammette almeno uno zero, che è unico in quanto essa è strettamente crescente ($W'(i) > 0$)
- Il TIR di queste operazioni può essere ricercato tramite un algoritmo di ricerca binaria, a cui va imposta un'opportuna condizione d'arresto (ad es. quando $|W|$ risulta "sufficientemente piccolo" oppure, visto che ad ogni iterazione si dimezza l'ampiezza dell'intervallo in cui cade il TIR e quindi si è in grado di maggiorare l'errore, dopo un fissato numero di iterazioni)

METODI DI RICERCA DEL TIR

- Per fissare le idee, concentriamoci sull'operazione di puro investimento con le caratteristiche appena descritte e inoltre supponiamo che la funzione W sia strettamente convessa (questo accade, per esempio, se $(T_1 > 1) \vee (T_1 = 1 \wedge n > 1)$)
- Indichiamo con i_* il TIR dell'operazione, che si sta cercando
- Il metodo di Newton, o metodo delle tangenti, prevede di fissare a caso un tasso i_1 e determinare l'intercetta sull'asse delle ascisse della retta tangente al grafico di W nel punto $(i_1, W(i_1))$
  $\rightsquigarrow$ se $W(i_1) = 0$ abbiamo già risolto il problema in quanto $i_* = i_1$, e quindi non occorre fare proprio nulla
  - $\triangleright$ se $i_1 < i_*$ (cioè $W(i_1) > 0$) tale intercetta, i_2, sarà $> i_1$ e $< i_*$ ($\rightsquigarrow$ quindi più vicina a i_*)
  - $\triangleright$ se $i_1 > i_*$ (cioè $W(i_1) < 0$) tale intercetta, i_2, sarà $< i_*$ ($\rightsquigarrow$ quindi ci si riconduce al caso precedente)
- Si procede poi iterativamente, con i_2 al posto di i_1

METODI DI RICERCA DEL TIR

- Si prova che tale procedimento converge alla soluzione cercata
- Ovviamente bisogna imporre un'opportuna condizione d'arresto
- Nel generico passo iterativo si pone dunque

$$i_{n+1} = i_n - \frac{W(i_n)}{W'(i_n)},\ n = 1, 2, \ldots$$

APPLICAZIONI AGLI ZERO-COUPON BOND

- Si consideri un titolo (obbligazione) che dà diritto di ricevere un importo certo N alla sua scadenza, T. Un titolo di questo tipo si chiama zero-coupon bond (zcb, o anche titolo a cedola nulla, o buono di puro sconto). N si chiama valore nominale del titolo
- Concentriamoci ora su zcb di valore nominale unitario ($N = 1$). Il loro prezzo varia nel tempo (in maniera aleatoria) in base alle condizioni prevalenti sul mercato. Indichiamo con $b(t,T)$ il prezzo di mercato, in t, di uno zcb unitario con scadenza $T > t$
- Calcoliamo il TIR, in t, dell'operazione di acquisto di tale titolo tenuto fino alla scadenza, cioè dell'operazione

$$\begin{array}{ccc} -b(t,T) & & 1 \\ \vdash & \text{———————} & \dashv \\ t & & T \end{array}$$

- Esso si chiama yield to maturity, o tasso di rendimento a scadenza, del titolo

Applicazioni a BOT e CTZ

- Il VAN dell'operazione, in t, è dato da

$$-b(t,T) + 1 \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^{T-t}$$

- Dall'equazione VAN=0 si può esplicitare i, cioè il TIR. Siccome esso dipende dall'epoca di acquisto t e dalla scadenza T, indichiamolo con $i(t,T)$:

$$i(t,T) = b(t,T)^{-\frac{1}{T-t}} - 1$$

- Lo Stato emette ogni mese due tipi di zero-coupon bond: i BOT (Buoni Ordinari del Tesoro) e i CTZ (Certificati del Tesoro di tipo Zero-coupon). I BOT sono emessi con durate pari a 3 mesi, 6 mesi, 1 anno; i CTZ con durata pari a 2 anni

Applicazioni a BOT e CTZ

- Siccome, nella pratica, per operazioni di durata non superiore all'anno si utilizza il regime dell'interesse semplice, per i BOT il rendimento a scadenza viene in realtà calcolato in questo regime:

$$\text{VAN} = -b(t,T) + 1 \cdot \frac{1}{1+i(T-t)}$$

- Dall'equazione VAN=0, esplicitando i, si ottiene il TIR, che ora indichiamo con il simbolo $L(t,T)$:

$$L(t,T) = \frac{1}{T-t}\left[\frac{1}{b(t,T)} - 1\right]$$

- Fissata l'epoca t, la funzione che ad ogni scadenza $T > t$ (in corrispondenza alla quale sono trattati i titoli sul mercato) associa il prezzo $b(t,T)$ o, rispettivamente, il tasso $L(t,T)$ o $i(t,T)$, si chiama struttura per scadenza dei prezzi, o dei tassi, a pronti di BOT e CTZ

APPLICAZIONI AI BTP

- Si consideri un titolo (obbligazione) che paga periodicamente (ogni anno, semestre, trimestre, ...) gli interessi posticipati (o cedole) sul valore nominale N e, alla scadenza, oltre all'ultima cedola rimborsa anche il valore nominale
- Un siffatto titolo si chiama coupon bond (in contrapposizione ai titoli senza cedole, o zero-coupon bond, appena analizzati)
- Lo Stato emette ogni mese titoli di questo tipo, chiamati BTP (Buoni del Tesoro Poliennali) con scadenze medio-lunghe (da 3 a 50 anni). Gli interessi sono semestrali
- Si distingue tra
  - ▷ tasso nominale (convertibile semestralmente) che è il tasso dichiarato che, oltre alla scadenza, identifica il titolo
  - ▷ tasso cedolare, pari alla metà del tasso nominale, che viene moltiplicato per il valore nominale per ottenere la cedola
  - ▷ tasso di rendimento a scadenza (o yield to maturity) che è il TIR dell'operazione di acquisto del titolo tenuto fino alla scadenza

- Questi titoli vengono quotati (come d'altronde anche BOT e CTZ) per ogni 100 Euro di valore nominale. Supponiamo comunque, come fatto in precedenza per gli zcb, che $N = 1$
- La quotazione avviene al corso secco, che non include la cedola in corso di maturazione, mentre l'acquisto avviene al corso tel-quel, che invece tiene conto del rateo già maturato
- Indichiamo con
  - ▷ i_c il tasso cedolare (ovvero la cedola, visto che $N = 1$)
  - ▷ T_0 la data di emissione del titolo
  - ▷ T_n la scadenza del titolo
  - ▷ $T_1, T_2, \dots, T_n$ le date di pagamento cedole (con $T_j - T_{j-1} = \frac{1}{2}$)

APPLICAZIONI AI BTP

- Supponiamo che l'acquisto avvenga all'epoca $t : T_{j-1} \leq t < T_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$
- Sia B_t^{secco} il corso secco e $B_t^{\text{tel-quel}}$ il corso tel-quel del titolo
- Per convenzione

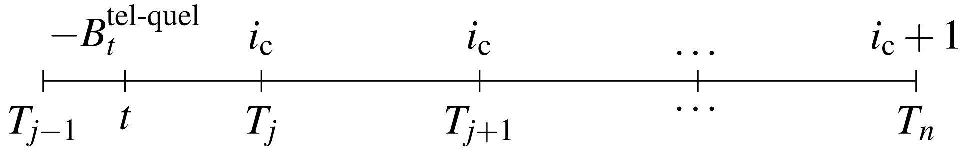
$$B_t^{\text{tel-quel}} = B_t^{\text{secco}} + i_c \frac{t - T_{j-1}}{T_j - T_{j-1}}$$

$\rightsquigarrow$ se $t = T_{j-1}$, $B_t^{\text{tel-quel}} = B_t^{\text{secco}}$

- La differenza $B_t^{\text{tel-quel}} - B_t^{\text{secco}}$ si chiama rateo
- In pratica, anche se $T_j - T_{j-1} = \frac{1}{2}$, il rateo viene calcolato moltiplicando i_c per il rapporto tra il numero di giorni effettivi che intercorrono tra le due date T_{j-1} e t (prima della loro conversione in numeri) e il numero di giorni effettivi del semestre che va da T_{j-1} a T_j

APPLICAZIONI AI BTP

- Il rendimento a scadenza di un BTP è dunque il TIR della seguente operazione finanziaria:



- Indicando con i_2 il tasso semestrale equivalente al TIR nel regime dell'interesse composto, e posto $v_2 = \frac{1}{1+i_2}$, l'equazione VAN=0 (in t) diventa ora

$$-B_t^{\text{tel-quel}} + \left(i_c a_{\overline{n-j+1}|i_2} + v_2^{n-j+1} \right) (1 + i_2)^{2(t - T_{j-1})} = 0$$

e il TIR è pari a $(1 + i_2)^2 - 1$, dove i_2 è appunto la soluzione di tale equazione

$\rightsquigarrow$ se $t = T_{j-1}$ e $B_t^{\text{tel-quel}} (= B_t^{\text{secco}}) = 1$ (titolo quotato alla pari), allora la soluzione in i_2 dell'equazione coincide con i_c