

## ESERCIZI SUI REGIMI FINANZIARI

tratti da:

L. Daboni, C. de Ferra: *Elementi di matematica finanziaria*, LINT, 1977

G. Scandolo: *Matematica finanziaria*, AMON, 2013

(ed eventualmente adattati)

- 1) Si definiscano formalmente le seguenti operazioni finanziarie:
  - a) acquisto oggi di un BOT con scadenza 6 mesi al prezzo di 98 Euro e valore nominale di 100 Euro,
  - b) investimento tra 6 mesi di 100 Euro con montante 9 mesi dopo l'inizio dell'operazione pari a 120 Euro,
  - c) finanziamento, che partirà tra 3 mesi, di 200 Euro con rimborso tramite due rate da 120 Euro, rispettivamente 1 e 2 anni dopo l'inizio dell'operazione,
  - d) somma delle 3 operazioni precedenti.

RISPOSTA: Supponendo di avere già effettuato la conversione di date in numeri, con la convenzione 30/360, e che "oggi" corrisponda all'origine dei tempi (data 0) si ha

a)  $(-98, 100)/(0, 1/2)$ , b)  $(-100, 120)/(1/2, 5/4)$ , c)  $(200, -120, -120)/(1/4, 5/4, 9/4)$ , d)  $(-98, 200, -120)/(0, 1/4, 9/4)$ .

- 2) In regime di interesse semplice con tasso annuo  $i=0.045$  si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
  - a) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
  - b) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
  - c) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

RISPOSTA: a) 8600 Euro, b) 388.25 Euro (circa), c) 306.345733 Euro (circa).

- 3) In regime di interesse composto con tasso annuo  $i=0.045$  si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
  - d) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
  - e) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
  - f) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

RISPOSTA: a) 8608.955661 Euro (circa), b) 418.2185518 Euro (circa), c) 304.4620201 Euro (circa).

- 4) Nel regime dello sconto commerciale con tasso annuo d'interesse  $i=0.045$  si calcoli, utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni:
  - g) il montante tra 1 anno e 8 mesi di 8000 Euro investiti oggi,
  - h) l'interesse per un investimento iniziale di 2000 Euro con durata 4 anni, 3 mesi e 23 giorni,
  - i) il valore attuale oggi di 350 Euro disponibili tra 3 anni e 2 mesi.

RISPOSTA: a) 8618.556701 Euro (circa), b) 456.2949904 Euro (circa), c) 302.2727273 Euro (circa).

- 5) Si determini quanto tempo occorre affinché un capitale di 78000 Euro impiegato – secondo la legge esponenziale di capitalizzazione – al tasso nominale convertibile bimestralmente  $j_6 = 0.05$ , frutti un interesse di 4200 Euro.

RISPOSTA: circa 1 anno e 19 giorni.

- 6) Si determini il tempo occorrente affinché, al tasso annuo  $i$ , un capitale raddoppi, la legge di capitalizzazione essendo
- quella lineare dell'interesse semplice,
  - quella esponenziale dell'interesse composto.

RISPOSTA: a)  $t = \frac{1}{i}$ , b)  $t = \frac{\ln 2}{\delta}$ .

- 7) Il montante, secondo la legge esponenziale di capitalizzazione, del capitale di 18360 Euro è, dopo 4 anni e 2 mesi, pari a 21263 Euro. Si determinino:
- il tasso annuo di impiego  $i$ ,
  - il tasso nominale convertibile semestralmente  $j_2$ ,
  - l'intensità d'interesse  $\delta$ .

RISPOSTA: Utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni si ha (approssimativamente) a)  $i = 0.03585853$ , b)  $\delta = 0.035230581$ , c)  $j_2 = 0.035542709$ .

- 8) Si determini il tasso trimestrale  $i_4$  equivalente al tasso quadrimestrale  $i_3 = 0.02$  in regime di interesse composto.

RISPOSTA:  $i_4 = 0.014962809$  (circa).

- 9) In regime esponenziale che legame c'è tra i tassi  $i_4$  e  $i_2/2$ ?

RISPOSTA:  $i_4 < i_2/2$  (si sfrutti la monotonia dei tassi nominali convertibili).

- 10) Si determini quanto tempo occorre affinché due capitali  $C'$  e  $C''$  investiti – in regime di interesse composto – rispettivamente ai tassi annui  $i'$  e  $i''$  producano lo stesso montante.

RISPOSTA:  $t = \frac{\ln(C''/C')}{\ln((1+i')/(1+i''))} = \frac{\ln(C'') - \ln(C')}{\ln(1+i') - \ln(1+i'')}$ .

- 11) Un capitale  $C$  viene impiegato in regime di interesse composto per  $n$  anni ad un tasso  $x$  e per i successivi  $m$  anni ( $m \neq n$ ) ad un tasso  $y$  generando in tal modo un montante pari ad  $aC$ ; scambiando i due tassi, ferme rimanendo le durate  $n$  e  $m$ , il montante sarebbe risultato pari a  $bC$ . Si determinino i due tassi  $x$  e  $y$ .

RISPOSTA:  $x = \left(\frac{a^n}{b^m}\right)^{\frac{1}{n^2-m^2}} - 1$ ,  $y = \left(\frac{b^n}{a^m}\right)^{\frac{1}{n^2-m^2}} - 1$ .

- 12) Una fattura di 2500 Euro è pagabile tra 90 giorni oppure in contanti con lo sconto del 2% (Attenzione, non si tratta del tasso annuo di sconto  $d$ !). Si determini quale tasso d'interesse frutti il pagamento in contanti, utilizzando la legge lineare dell'interesse semplice.

RISPOSTA: Utilizzando la convenzione 30/360 per il calcolo dei giorni si ha  $i = 0.081632653$  (circa).

- 13) Dato un importo di 4000 Euro disponibile tra 3 anni, si determini sotto quali delle leggi seguenti esso ha il più basso valore attuale:

- interesse semplice con tasso semestrale  $i_2 = 0.03$ ,
- esponenziale con intensità istantanea  $\delta = 0.052$ ,
- sconto commerciale con tasso di sconto mensile  $d_{12} = 0.0052$ .

RISPOSTA: c).

- 14) Dato un capitale iniziale di 2500 Euro, si determini sotto quali delle leggi seguenti esso ha il più alto montante dopo 2 anni e 3 mesi (con la convenzione 30/360):
- d) interesse semplice con tasso annuo  $i = 0.1$ ,
  - e) esponenziale con intensità istantanea  $\delta = 0.094$ ,
  - f) “mista”, con capitalizzazione degli interessi ogni 4 mesi (con prima capitalizzazione esattamente dopo 4 mesi dall’inizio dell’operazione), e interesse semplice tra due capitalizzazioni consecutive, tasso nominale convertibile quadrimestralmente  $j_3 = 0.09$ .

RISPOSTA: b).

- 15) Data una legge di interesse semplice con tasso annuo  $i = 0.12$ , si determini l’intensità istantanea  $\delta$  di una legge esponenziale che produca lo stesso montante dopo 2 anni e 4 mesi (convenzione 30/360).

RISPOSTA:  $\delta = 0.105797176$  (circa).

- 16) Una banca capitalizza gli interessi ogni 3 mesi e tra due capitalizzazioni consecutive utilizza il regime dell’interesse semplice. Il tasso nominale convertibile trimestralmente è  $j_4 = 0.04$ . Si supponga di investire 1000 Euro in un istante di capitalizzazione. Si determini (con la convenzione 30/360):
- a) il montante dopo 2 anni,
  - b) il montante dopo 5 mesi,
  - c) il tempo necessario affinché il capitale investito raddoppi.

RISPOSTA: a) 1082.856706 Euro (circa), b) 1016.73 Euro, c) 17 anni, 4 mesi e 29 giorni (circa).

- 17) Il giorno 20 febbraio 2009 viene aperto (senza spese) un conto corrente bancario versando un capitale di 12000 Euro. La banca utilizza un regime “misto”, capitalizzando gli interessi al 1 gennaio e al 1 luglio di ogni anno e usando il regime dell’interesse semplice tra due capitalizzazioni consecutive. Il tasso nominale convertibile semestralmente è  $j_2 = 0.02$  (al netto delle imposte) e la convenzione per il calcolo dei giorni è la 30/360. Il 3 novembre 2009 il conto viene chiuso, pagando una commissione di 30 Euro e, con l’intero capitale disinvestito, il 6 novembre 2009 viene aperto un nuovo conto (senza spese) che funziona come il primo, salvo che il tasso nominale (netto) convertibile semestralmente è ora  $j_2' = 0.03$ . Si calcoli il montante del nuovo conto al 20 febbraio 2010.

RISPOSTA: 12244.69269 Euro (circa).

- 18) Un capitale di 1000 Euro viene investito in regime “misto” con capitalizzazione trimestrale degli interessi e legge dell’interesse semplice tra due date consecutive di capitalizzazione, al tasso nominale convertibile trimestralmente  $j_4 = 0.06$ . All’istante dell’investimento manca il tempo  $\tau$  alla capitalizzazione successiva. Alla quarta capitalizzazione, il montante è pari a 1057 Euro. Determinare  $\tau$ .

RISPOSTA:  $\tau = 0.180451039$  (circa 65-66 giorni, a seconda della convenzione).

- 19) Sappiamo di avere a disposizione una somma di 1000 Euro tra 1 anno. Una società finanziaria accetta di anticiparci la somma in un qualunque momento, utilizzando il regime dello sconto commerciale al tasso di sconto  $d = 0.03$ . Possiamo poi reinvestire immediatamente tale somma, in un conto corrente bancario, al tasso  $i = 0.031$  nel regime dell’interesse semplice. Si determini tra quanto tempo conviene farsi anticipare la somma in modo tale da avere il massimo montante dopo 1 anno.

RISPOSTA: 5 mesi e 16 giorni circa, nella convenzione 30/360.

## ESERCIZI SULLE LEGGI FINANZIARIE IN GENERALE

tratti da:

L. Daboni, C. de Ferra: *Elementi di matematica finanziaria*, LINT, 1977

G. Scandolo: *Matematica finanziaria*, AMON, 2013

(ed eventualmente adattati)

- 1) Data l'intensità  $\delta(t) = \frac{i}{1+it}$ , si determini il fattore di scambio  $\varphi(T_1, T_2)$  di una legge omogenea d'importo e scindibile avente questa intensità.

$$\text{RISPOSTA: } \varphi(T_1, T_2) = \frac{1+iT_2}{1+iT_1}.$$

- 2) Data l'intensità  $\delta(t) = \frac{d}{1-dt}$ , si determini il fattore di scambio  $\varphi(T_1, T_2)$  di una legge omogenea d'importo e scindibile avente questa intensità.

$$\text{RISPOSTA: } \varphi(T_1, T_2) = \frac{1-dT_1}{1-dT_2}, \text{ con } 0 < T_1 < \frac{1}{d} \text{ e } 0 < T_2 < \frac{1}{d}.$$

- 3) Si verifichi se le seguenti funzioni soddisfano i 3 postulati richiesti al fattore di scambio di una legge finanziaria omogenea d'importo e uniforme nel tempo:

- a)  $\bar{\varphi}(t) = e^{2t-t^2}$ ,
- b)  $\bar{\varphi}(t) = \ln(e+t)$ ,
- c)  $\bar{\varphi}(t) = 2 - e^{-t/4}$ .

RISPOSTA: I postulati 1) e 3) sono soddisfatti da a), b), c); il postulato 2) è soddisfatto da a) sempre, da b) solo se  $t > 1-e$ , da c) solo se  $t > -4\ln 2$  (quindi con b) e c) non si possono portare "troppo indietro" gli importi nel tempo).

- 4) Per quale valore del parametro  $a > 0$  la funzione  $u(t) = 1+at^2$  è una legge di capitalizzazione omogenea d'importo e uniforme nel tempo in base a cui una somma investita oggi triplica il suo valore in 7 anni e 3 mesi?

RISPOSTA:  $a = 0.038$  (circa).