Lezione, Giovedì 26. Settembre

giovedì 26 settembre 2019 12:15

RICAPITOLIAMO:

- SPAZI VETTORIALI
  Ambienti per geometria
- OGGETTI GEOMETRICI:
  punti, rette, piani, iperpiani, ...
- EQUAZIONI : ad. es.
  EQ. CARTESIANE : SISTEMI DI EQ. LINEARI (DI 1° GRADO) in n INCOGNITE

§ 3 : SISTEMI LINEARI:

Def. : Un SISTEMA LINEARE di m eq. in n incognite è un insieme finito di eq. del tipo:

$$(*)\quad \begin{cases} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \cdots + a_{1n} x_n = b_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \cdots + a_{2n} x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \cdots + a_{mn} x_n = b_m \end{cases}$$

COEFFICIENTI

$a_{11}, \dots, a_{mn} \in K \; (= \mathbb{R}, \mathbb{C}, \dots)$,

$b_1, \dots, b_m \in K$

Def. Una SOLUZIONE del sistema $(*)$ è un' n-UPLA DI SCALARI $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ con $s_1, \dots, s_n \in K$ tali che se sostituiti alle incognite $(x_1, x_2, \dots, x_n)$, le equazioni di $(*)$ sono soddisfatte.

DEF. Se $(*)$ ammette almeno 1 soluzione, allora $(*)$ si dice COMPATIBILE. Se $(*)$ non ha soluzioni, si dice INCOMPATIBILE o IMPOSSIBILE.

Esempi: ① $(*)\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + 3x_2 = 2 \end{cases}$ è INCOMPAT.

② $\begin{cases} x_1 + 3x_2 = 1 \\ x_1 + x_2 = 0 \end{cases}$ per sostituzione

$x_2 = -x_1$ $\Longrightarrow$ $x_2 = \frac{1}{2}$

$x_1 - 3x_1 = 1$

$-2x_1 = 1$, $\quad x_1 = -\frac{1}{2}$

È COMP. CON 1! SOLUZIONE $(s_1, s_2) = (-1/2, 1/2)$

③ $\begin{cases} x_1 - x_2 = 3 \\ 2x_1 - 2x_2 = 6 \end{cases}$ è COMPATIBILE

$x_2 = x_1 - 3$

ha INFINITE SOLUZIONI $(s_1, s_2) = (s_1, s_1 - 3)$

con $s_1 \in K = \mathbb{R}, \mathbb{C}$

OSS. : Per studiare l'esistenza o meno di soluzioni di $(*)$ useremo le tecniche delle matrici.

Def. La MATRICE DEI COEFFICIENTI di $(*)$ è la matrice A data da:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m,n}(K)$$

$m = \#$ delle equazioni

$n = \#$ delle incognite

VETTORE DEI TERMINI NOTI:

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m = \underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{m \text{ volte}}$$

$K = \mathbb{R}$ $\qquad \in M_{m,1}(\mathbb{R})$

Def. Introduco FORMALMENTE il VETTORE DELLE INCOGNITE

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in M_{n,1}(\cdot)$$

OSSERVAZIONE : Con queste scelte il sistema $(*)$ si può riscrivere:

$$\underbrace{\underset{m \times n}{A} \cdot \underset{n \times 1}{X}}_{m \times 1} = \underbrace{b}_{m \times 1}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} x_1 + \cdots + a_{1n} x_n \\ \vdots \\ a_{m1} x_1 + \cdots + a_{mn} x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$(*)$$