Lezione. 30 settembre

lunedì 30 settembre 2019 09:16

ESEMPIO DI UTILIZZO DEI SISTEMI LINEARI

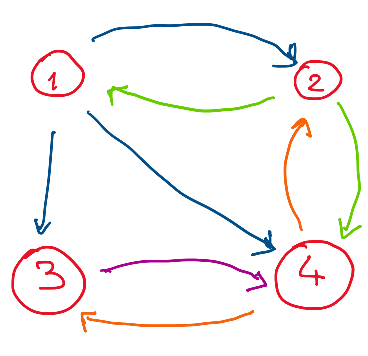
2000 : Fondato GOOGLE da LARRY PAGE (informatico) e SERGEJ BRIN (matematico)

PARTENZA: Importanza di una pagina dipende dal # (numero) di pagine importanti che puntano ad essa.

- Inoltre: l'import. di una pagina si trasferisce in parti uguali alle pagine a cui punta
- Import. di pagina = somma delle frazioni di importanze che le derivano dalle pagine che ad essa puntano

ES. 4 pagine:

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Definiamo $H \in M_4(\mathbb{R})$ tale che

$$h_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } \exists \text{ link dalla pagina } i \text{ alla } j \\ 0 & \text{se } \nexists \text{ link dalla } i \text{ alla } j \end{cases}$$

MATRICE DI ADIACENZA

La somma delle entrate di H in ogni riga i = # link che partono dalla pagina i $= r_i$

Indichiamo con x_j l'import. della pagina j

$$x_j = h_{1j}\frac{x_1}{r_1} + h_{2j}\frac{x_2}{r_2} + h_{3j}\frac{x_3}{r_3} + h_{4j}\frac{x_4}{r_4}$$

$\forall \; j = 1,2,3,4$

$$\begin{cases} \left(\frac{h_{11}}{r_1} - 1\right)x_1 + \frac{h_{21}}{r_2}x_2 + \frac{h_{31}}{r_3}x_3 + \frac{h_{41}}{r_4}x_4 = 0 \\ \frac{h_{12}}{r_1}x_1 + \left(\frac{h_{22}}{r_2} - 1\right)x_2 + \frac{h_{32}}{r_3}x_3 + \frac{h_{42}}{r_4}x_4 = 0 \\ j=3 \quad \ldots \\ j=4 \quad \ldots \end{cases}$$

Questo sistema ha spesso come unica soluzione quella nulla $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Page - Brin: correzione - aggiunta di termine noto

$$x_j = d\left(h_{1j}\frac{x_1}{r_1} + h_{2j}\frac{x_2}{r_2} + \ldots + h_{4j}\frac{x_4}{r_4}\right) + \frac{1}{4}(1-d)$$

con d costante $0 < d < 1$

SOLITAMENTE : $d = 0.85$

COMPLESSITÀ DI CALCOLO DI SOLUZ. DI SIST. LIN.

PER SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} ax_1 + bx_2 = e \\ cx_1 + dx_2 = f \end{cases} \qquad a, b, c, d \neq 0$$

$dx_2 = f - cx_1$ $\quad 1^e$

(*) $x_2 = \frac{f - cx_1}{d}$ $\quad 2^e$

$ax_1 + b\cdot\frac{f}{d} - b\cdot\frac{c}{d}x_1 = e$ $\quad 3^e + 4^e$

$\left(a - \frac{b\cdot c}{d}\right)x_1 + b\cdot\frac{f}{d} = e$ $\quad 5^a$

$\left(a - \frac{b\cdot c}{d}\right)x_1 = e - b\cdot\frac{f}{d}$ $\quad 6^a$

divido per $\left(a - \frac{b\cdot c}{d}\right)$ $\quad 7^a$ trovo x_1

sostituisco in (*) $\quad 10^a$ e trovo x_2

IN GEN. se il sistema $n \times n$ (n eq. in n incognite)

\# operazioni per sostituzione

$\sim \frac{2}{3}n^3$ + termini di grado minore

$n = 2 \quad \sim \frac{16}{3}$ + altri termini

DET. DI EVENTUALI SOLUZIONI di

$A \cdot X = b$ sistema lineare

CASO IN CUI ESISTE 1! SOLUZIONE:

Teorema di Cramer: Supp. di avere un sistema $n \times n$:

$A \cdot x = b$, $A \in M_n(K)$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

e supp. che A sia INVERTIBILE.

Allora: Il sistema ammette 1! soluzione

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} = \underbrace{\underbrace{A^{-1}}_{n \times n} \cdot \underbrace{b}_{n \times 1}}_{n \times 1}$$

Dim. • s è una soluzione: cioè devo dimostrare che $A \cdot s = b$

$A \cdot (A^{-1} \cdot b) = b$

associativo $\Rightarrow$ $\underbrace{(A \cdot A^{-1})} \cdot b = b$

$= I_n \cdot b = b$

$b = b$ è vero!

• è l'unica: se s' è un'altra soluzione

$\underbrace{A \cdot s'}_{n \times 1} = \underset{n \times 1}{b}$ moltiplico per A^{-1} a sinistra

$A^{-1} \cdot (A \cdot s') = A^{-1} \cdot b$

assoc. $\underbrace{\underbrace{(A^{-1} \cdot A)}_{= I_n} \cdot s'} = A^{-1} \cdot b$

$s' = A^{-1} \cdot b = s$

TEOREMA DI STRUTTURA PER LE SOLUZ. DI UN SISTEMA LINEARE:

Ci permette capire com'è fatto l'insieme delle soluzioni dei sistemi compatibili;

OSS: Lo spazio ambiente delle soluzioni

$$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ s_2 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \text{ o più in generale } \in K^n$$

$K^n = \underbrace{K \times \cdots \times K}_{n\text{-volte}}$ è spazio vettoriale su K

Enunciato 1: $A \cdot X = 0$

Per ogni coppia di soluzioni s e s' di $Ax = 0$ anche $s + s'$ è soluzione di $Ax = 0$

e se s è soluzione, allora $\forall c \in K$ anche $c \cdot s$ è soluzione di $Ax = 0$

Diremo: L'insieme delle soluzioni di $Ax = 0$ forma un SOTTOSPAZIO VETTORIALE di K^n.

Dim.: s e s' soluzioni $\Rightarrow$ $A \cdot s = 0$

$A \cdot s' = 0$

Mi chiedo: $s + s'$ è sol.? sì

$A \cdot (s + s') = A \cdot s + A \cdot s' = 0 + 0 = 0$

s sol.: $A \cdot s = 0$, $c \in K$ qualunque

Mi chiedo: $c \cdot s$ è soluzione? sì

$$A \cdot (c \cdot s) = c \cdot \underbrace{(A \cdot s)}_{=0} = c \cdot 0 = 0$$

PROPRIETÀ di •