Esercizi di Geometria
Ingegneria Industriale e Navale
2019/2020
secondo foglio

September 30, 2019

1. Si scriva la matrice dei coefficienti del sistema lineare associato a un page ranking con matrice di adiacenza
$$H = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Si dimostri che se una matrice quadrata $N \in M_n(\mathbb{K})$ è nilpotente, cioè esiste $k \in \mathbb{N}$ tale che $N^k = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$, allora N non è invertibile.

3. Una matrice quadrata $A \in M_n(\mathbb{K})$ si dice *unipotente* se una sua potenza verifica
$$A^k = I_n, \text{ per un opportuno } k \in \mathbb{N}.$$
Si dimostri che se A è unipotente, allora A è invertibile.

4. Si dimostri che la matrice
$$\begin{pmatrix} -1/2 & -\sqrt{3}/2 \\ \sqrt{3}/2 & -1/2 \end{pmatrix}$$
è unipotente, e si determini la sua inversa.

5. Sia $D \in M_n(\mathbb{K})$ una matrice quadrata *diagonale*, cioè del tipo

$$D = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si dimostri che D è invertibile se e solo se

$$a_{11} \cdot a_{22} \cdot \dots \cdot a_{nn} \neq 0.$$

6. Sia $A \cdot X = 0$ un sistema lineare omogeneo di m equazioni in n incognite a coefficienti in un campo $\mathbb{K}$. Si dimostri che se $m < n$, allora il sistema ammette almeno una soluzione non banale.

7. Si verifichi che se $A \in M_n(\mathbb{K})$ è una matrice quadrata invertibile, allora per A *vale la legge di cancellazione*:

$$A \cdot B = A \cdot C \Rightarrow B = C,$$

con $B, C \in M_n(\mathbb{K})$.

8. Si verifichi che se A è una matrice invertibile, allora anche la trasposta ${}^tA$ è invertibile e vale:

$$({}^tA)^{-1} =^t (A^{-1}).$$

9. Si trovi un esempio di due matrici simmetriche $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ tali che il prodotto $A \cdot B$ non sia simmetrico.

10. Si dimostri che il prodotto di due matrici simmetriche $A, B \in M_n(\mathbb{K})$ è simmetrico se e solo se vale

$$A \cdot B = B \cdot A.$$