Quinta prova scritta di Geometria 1, 12 settembre 2019

1. i) Dato un elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$, per un numero primo p, dimostrare che l'applicazione $\phi : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Z}_p$, $\phi(\bar{x}) = \bar{a}\bar{x}$, è iniettiva.

ii) Concludere che ogni elemento $\bar{a} \neq \bar{0}$ in $\mathbb{Z}_p$ ha un elemento inverso rispetto al prodotto.

iii) Trovare l'elemento inverso di $\bar{6}$ in $\mathbb{Z}_{13}$.

iv) Trovare l'elemento inverso di 3+5i in $\mathbb{C}$.

2. i) Usando vettori e ortogonalità, dimostrare il teorema di Talete che l'angolo opposto al diametro di un triangolo iscritto in una semicirconferenza è un angolo retto.

ii) Sia V uno spazio unitario (sul campo complesso $\mathbb{C}$). Utilizzando la disuguaglianza di Cauchy-Schwarz, dimostrare la disuguaglianza triangolare per la norma associata al prodotto scalare di V.

3. i) Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base ortonormale di uno spazio unitario V; dimostrare che, per ogni $v \in V$,

$$v =< v_1, v > v_1 + \ldots + < v_n, v > v_n.$$

ii) Sia V uno spazio unitario di dimensione finita n. Dimostrare che V ha una base ortonormale (direttamente, senza usare il teorema di Gram-Schmidt).

4. i) Sia $f : K^n \to K^m$ un'applicazione lineare. Dimostrare che esiste una matrice $A = (a_{ij})$ (matrice $m \times n$) tale che $f = L(A) : K^n \to K^m$ (l'applicazione lineare associata alla matrice A).

ii) Sia A una matrice reale quadrata $n \times n$. Se esiste una base ortonormale $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^n$ di autovettori di A, dimostrare che A è una matrice simmetrica.

5. i) Dimostrare che $m_g(\lambda) \leq m_a(\lambda)$, per ogni autovalore λ di un endomorfismo $f : V \to V$ di uno spazio vettoriale V di dimensione finita n.

ii) Siano g, a e n numeri interi con $1 \leq g \leq a \leq n$. Dimostrare che esiste una matrice quadrata $n \times n$ con un autovalore λ tale che $m_g(\lambda) = g$ e $m_a(\lambda) = a$.