Quarta prova scritta di Geometria 1, 9 luglio 2019

1. Sia $v_1, \ldots, v_n$ una base di V, e siano $v_1^*, \ldots, v_n^* \in V^*$, con $v_i^*(v_j) = \delta_{ij}$.

i) Dimostrare che $v_1^*, \ldots, v_n^*$ sono linearmente indipendenti.

ii) Dimostrare che, per ogni $v \in V$, $\quad v = v_1^*(v)v_1 + \ldots + v_n^*(v)v_n$.

iii) Dimostrare che, per ogni $\phi \in V^*$, $\quad \phi = \phi(v_1)v_1^* + \ldots + \phi(v_n)v_n^*$.

2. i) Sia $f : V \to W$ un'applicazione lineare di spazi vettoriali di dimensioni finite. Dimostrare che esistono basi $\mathcal{A}$ di V e $\mathcal{B}$ di W tali che la matrice $\mathrm{M}_{\mathcal{B}}^{\mathcal{A}}(f)$ di f rispetto a queste basi è della forma $\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

ii) Concludere che per ogni matrice A esistono matrici invertibili S e T tale che SAT è della forma in i).

3. Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V e $w_1, \ldots, w_m, v_1, \ldots, v_r$ un prolungamento a una base di V. Dimostrare che $[v_1], \ldots, [v_r]$ è una base dello spazio quoziente V/W.

4. i) Determinare il numero di elementi (l'ordine) del gruppo generale lineare $\mathrm{GL}(n, \mathbb{Z}_p)$ (le matrici invertibili $n \times n$ con coefficienti nel campo finito $K = \mathbb{Z}_p$, per un numero primo p). Poi elencare tutti gli elementi del gruppo $\mathrm{GL}(2,\mathbb{Z}_2)$.

ii) Elencare tutti gli elementi del gruppo simmetrico S_3 e del gruppo alternante A_4 (usare cicli per descrivere permutazioni).

5. Sia V uno spazio vettoriale unitario di dimensione finita e $f : V \to V$ un endomorfismo autoaggiunto. Dimostrare che:

i) ogni autovalore di f è reale;

ii) autovettori di autovalori distinti sono ortogonali;

iii) la matrice di f rispetto a una base ortonormale di V è hermitiana;

iv) esiste una base ortonormale di autovettori di f.