Tutorato del 30 ottobre 2019

31 ottobre 2019

Esercizio 1, foglio 3 Il prodotto cartesiano $V \times W$ di due K-spazi vettoriali è un K-spazio vettoriale, con le seguenti operazioni:

$$(v_1, w_1) + (v_2, w_2) = (v_1 + v_2, w_1 + w_2) \tag{1}$$
$$\lambda(v, w) = (\lambda v, \lambda w). \tag{2}$$

Dimostrare che, se $v_1, \dots, v_n$ formano una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W, allora $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ è una base di $V \times W$.

Dimostrazione. Sia (v, w) il generico elemento dello spazio $V \times W$. Cioè $v \in V$, e $w \in W$. Sapendo che $v_1, \dots, v_n$ è una base di V e $w_1, \dots, w_m$ una base di W, scriviamo:

$$v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n$$

$$w = \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m$$

con $\lambda_i \in K$ e $\mu_i \in K, \forall i$.
utilizzando le proprietà 1, 2 si ottiene che:

$$\begin{aligned}
(v, w) &= (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n, \mu_1 w_1 + \dots + \mu_m w_m) \\
&= (\lambda_1 v_1, 0) + \dots + (\lambda_n v_n, 0) + (0, \mu_1 w_1) + \dots + (0, \mu_m w_m) \\
&= \lambda_1 (v_1, 0) + \dots + \lambda_n (v_n, 0) + \mu_1 (0, w_1) + \dots + \mu_m (0, w_m).
\end{aligned}$$

Dunque $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ genera lo spazio $V \times W$.
Dimostriamo ora che $(v_1, 0), \dots, (v_n, 0), (0, w_1), \dots, (0, w_m)$ sono linearmente indipendenti.
Prendiamo allora una combinazione lineare nulla:

$$\lambda_1 (v_1, 0) + \dots + \lambda_n (v_n, 0) + \lambda_{n+1} (0, w_1) + \dots + \lambda_{n+m} (0, w_m) = (0, 0)$$

Nuovamente utilizzando le proprietà dello spazio vettoriale $V \times W$ si può scrivere quanto segue:

$$\begin{aligned}(0,0) &= \lambda_1(v_1,0) + \cdots + \lambda_n(v_n,0) + \lambda_{n+1}(0,w_1) + \cdots + \lambda_{n+m}(0,w_m)\\ &= (\lambda_1 v_1, 0) + \cdots + (\lambda_n v_n, 0) + (0, \lambda_{n+1} w_1) + \cdots + (0, \lambda_{n+m} w_m)\\ &= (\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n, \lambda_{n+1} w_1 + \cdots + \lambda_{n+m} w_m).\end{aligned}$$

Che è equivalente al sistema: $\begin{cases}\lambda_1 v_1 + \cdots + \lambda_n v_n = 0\\ \lambda_{n+1} w_1 + \cdots + \lambda_{n+m} w_m = 0\end{cases}$

In particolare le due equazioni del sistema sono soddisfatte se e solo se $\lambda_i = 0 \forall i \in \{1, \ldots, m+n\}$, come deriva dalla definizione di base per V e W. Dunque anche $(v_1,0), \ldots, (v_n,0), (0,w_1), \ldots, (0,w_m)$ sono linearmente indipendenti. □

Esercizio 2, foglio 3 Sia $w_1, \ldots, w_m$ una base del sottospazio W di V, e sia $w_1, \ldots, w_m, v_{m+1}, \ldots, v_n$ un suo prolungamento a una base di V. Dimostrare che le classi d'equivalenza $[v_{m+1}], \ldots, [v_n]$ costituiscono una base dello spazio quoziente V/W.

Dimostrazione. Ricordiamo che con V/W si denota l'insieme quoziente $V/\sim$ dove la relazione d'ordine è definita come segue:

$$v_1 \sim v_2 \iff v_1 - v_2 \in W$$

In particolare, V/W con le seguenti definizioni di somma e prodotto in V/W

$$\begin{aligned}[v_1] + [v_2] &= [v_1 + v_2]\\ \lambda[v_1] &= [\lambda v_1]\end{aligned}$$

ha la struttura di K-spazio vettoriale.
Con tali strumenti possiamo procedere nella dimostrazione.
Sia $[v] \in V/W$ qualunque. Poichè $v \in V$ allora esistono coefficienti $\lambda_i \in K$ tali che $v = \lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots \lambda_n v_n$. Sostituiamo dentro la classe e utilizziamo le proprietà di somma e prodotto:

$$\begin{aligned}[v] &= [\lambda_1 w_1 + \cdots + \lambda_m w_m + \lambda_{m+1} v_{m+1} + \ldots \lambda_n v_n]\\ &= [\lambda_1 w_1] + \cdots + [\lambda_m w_m] + [\lambda_{m+1} v_{m+1}] + \ldots [\lambda_n v_n]\\ &= \lambda_1 [w_1] + \cdots + \lambda_m [w_m] + \lambda_{m+1} [v_{m+1}] + \ldots \lambda_n [v_n]\end{aligned}$$

Ricordiamo che $w_i \in W$, quindi $w_i - 0 \in W$, cioè $w_i \sim 0$, da cui $[w_i] = [0]$. Perciò, sostituendo nell'ultima equazione, si ottiene quanto segue:

$$[v] = \lambda_{m+1}[v_{m+1}] + \ldots \lambda_n [v_n]$$

Si è quindi dimostrato che $[v_{m+1}], \dots, [v_n]$ generano V/W.
Per dimostrare la lineare indipendenza utilizziamo il seguente risultato:

$$v_i \notin W, \forall i \in \{m+1, \dots, n\} \tag{3}$$

Se per assurdo così non fosse, allora $\exists i \in \{m+1, \dots, n\}$ tale che $v_i \in W$ cioè v_i è combinazione lineare di $w_1, \dots, w_m$, ma ciò è in contraddizione con fatto che $w_1, \dots, w_m, v_{m+1}, \dots, v_n$ sia base di V.
Si consideri la combinazione lineare seguente:

$$\lambda_{m+1}[v_{m+1}], \dots, \lambda_n[v_n] = [0]$$

Utilizziamo le operazioni dello spazio vettoriale V/W:

$$\begin{aligned}[0] &= \lambda_{m+1}[v_{m+1}], \dots, \lambda_n[v_n] \\ &= [\lambda_{m+1}v_{m+1}, \dots, \lambda_n v_n]\end{aligned}$$

Quindi $\lambda_{m+1}v_{m+1}, \dots, \lambda_n v_n \sim 0$, da cui $\lambda_{m+1}v_{m+1}, \dots, \lambda_n v_n \in W$ ma ciò è impossibile per 3, dunque resta solo la possibilità di avere $\lambda_i = 0, \forall i \in \{m+1, \dots, n\}$, dimostrando la lineare indipendenza. $\square$

Esercizio 1.1, compito del 07/02/19 Trovare le coordinate del vettore $v = (a, b, c)$ rispetto alla base $a^1 = (1, 1, 1)$, $a^2 = (1, 2, -1)$, $a^3 = (0, -1, 1)$ di $\mathbb{R}^3$.

Dimostrazione. Il vettore $v = (a, b, c)$ è scritto nella base standard $e_1 = (1, 0, 0), e_2 = (0, 1, 0), e_3 = (0, 0, 1)$, cioè

$$(a, b, c) = ae_1 + be_2 + ce_3. \tag{4}$$

Cerchiamo α, β, γ tali che $(a, b, c) = \alpha a^1 + \beta a^2 + \gamma a^3$. Queste ultime sono le coordinate del vettore v nella base a^1, a^2, a^3.
Scriviamo prima e_1, e_2, e_3 come combinazione lineare di a^1, a^2, a^3. In questo modo basterà sostituire le espressioni degli e_i in 4 e riordinare per ottenere l'espressione del vettore v nelle nuove coordinate.

$$\begin{aligned} e_1 &= \lambda_1 a^1 + \lambda_2 a^2 + \lambda_3 a^3 \\ (1, 0, 0) &= \lambda_1(1, 1, 1) + \lambda_2(1, 2, -1) + \lambda_3(0, -1, 1) \\ &\begin{cases} 1 = \lambda_1 + \lambda_2 \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Risolvendo il sistema si ottiene $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 3$, cioè

$$e_1 = -a^1 + 2a^2 + 3a^3 \tag{5}$$

Stesso ragionamento per e_2:

$$\begin{aligned} e_2 &= \mu_1 a^1 + \mu_2 a^2 + \mu_3 a^3 \\ (0,1,0) &= \mu_1(1,1,1) + \mu_2(1,2,-1) + \mu_3(0,-1,1) \\ &\begin{cases} 0 = \mu_1 + \mu_2 \\ 1 = \mu_1 + 2\mu_2 - \mu_3 \\ 0 = \mu_1 - \mu_2 + \mu_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Si ottiene $\mu_1 = 1, \mu_2 = -1, \mu_3 = -2$:

$$e_2 = a^1 - a^2 - 2a^3 \tag{6}$$

Analogamente per e_3:

$$\begin{aligned} e_3 &= \delta_1 a^1 + \delta_2 a^2 + \delta_3 a^3 \\ (0,0,1) &= \delta_1(1,1,1) + \delta_2(1,2,-1) + \delta_3(0,-1,1) \\ &\begin{cases} 0 = \delta_1 + \delta_2 \\ 0 = \delta_1 + 2\delta_2 - \delta_3 \\ 1 = \delta_1 - \delta_2 + \delta_3 \end{cases} \end{aligned}$$

Da qui $\delta_1 = 1, \delta_2 = -1, \delta_3 = -1$:

$$e_3 = a^1 - a^2 - a^3. \tag{7}$$

Sostituendo in 4:

$$\begin{aligned} v &= ae_1 + be_2 + ce_3 \\ &= a(-a^1 + 2a^2 + 3a^3) + b(a^1 - a^2 - 2a^3) + c(a^1 - a^2 - a^3) \\ &= (-a + b + c)a^1 + (2a - b - c)a^2 + (3a - 2b - c)a^3. \end{aligned}$$

Dunque le coordinate di v rispetto alla base a^1, a^2, a^3 sono

$$\begin{cases} \alpha &= -a + b + c \\ \beta &= 2a - b - c \\ \gamma &= 3a - 2b - c. \end{cases}$$

$\square$