Esercizi svolti Foglio 8

Giacomo Umer

Esercizio 1. Sia $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ l'applicazione lineare rappresentata rispetto alle basi canoniche dalla matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Trovare la matrice che rappresenta f rispetto alle basi $\mathcal{A}_3$, formata da $(1,0,0)$, $(1,1,0)$, $(1,1,1)$ e $\mathcal{B}_2$ da $(1,0)$, $(1,1)$.

La matrice A ha come prima, seconda e terza colonna rispettivamente $f(1,0,0)$, $f(0,1,0)$ e $f(0,0,1)$ scritti nella base canonica $\{(1,0), (0,1)\}$; analogamente per poter costruire la matrice rappresentante f nelle basi $\mathcal{A}_3$ e $\mathcal{B}_2$ dovremo scrivere gli elementi $f(1,0,0)$, $f(1,1,0)$ e $f(1,1,1)$ nella base $\{(1,0), (1,1)\}$:

$$\begin{aligned} f(1,0,0) &= (1,1) = \mathbf{0} \cdot (1,0) + \mathbf{1} \cdot (1,1); \\ f(1,1,0) &= f(1,0,0) + f(0,1,0) = \\ &\qquad = (1,1) + (1,2) = (2,3) = \mathbf{(\text{-}1)} \cdot (1,0) + \mathbf{3} \cdot (1,1); \\ f(1,1,1) &= f(1,0,0) + f(0,1,0) + f(0,0,1) = \\ &\qquad = (1,1) + (1,2) + (0,1) = (2,4) = \mathbf{(\text{-}2)} \cdot (1,0) + \mathbf{4} \cdot (1,1). \end{aligned}$$

Le coordinate delle immagini della base $\mathcal{A}_3$ ci forniscono la matrice richiesta:

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Alternativamente è possibile adottare un altro metodo per costruire la matrice A': scriviamola come prodotto di matrici sfruttando le matrici di cambiamento di coordinate.

$$A' = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{A}_3}(f) = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_2}^{\mathcal{C}_2}(id_{\mathbb{R}^2})\mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3}(f)\mathcal{M}_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{A}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$$

dove $\mathcal{M}_{\mathcal{C}_2}^{\mathcal{C}_3}(f) = A$.

La matrice $\mathcal{M}^{\mathcal{C}_2}_{\mathcal{B}_2}(id_{\mathbb{R}^2})$ ha come vettori colonna le coordinate dei vettori della base canonica rappresentati rispetto a $\mathcal{B}_2$:

$$(1,0) = \mathbf{1} \cdot (1,0) + \mathbf{0} \cdot (1,1)$$
$$(0,1) = \textbf{(-1)} \cdot (1,0) + \mathbf{1} \cdot (1,1)$$

mentre $\mathcal{M}^{\mathcal{A}_3}_{\mathcal{C}_3}(id_{\mathbb{R}^3})$ ha come vettori colonna le coordinate dei vettori della base $\mathcal{A}_3$ rappresentati rispetto alla base canonica.
Otteniamo quindi:

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolare il determinante della matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Procederemo utilizzando lo sviluppo di Laplace:

$$det(A) = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 27 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (-27) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= (-27) \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = (-27) \cdot (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & \sqrt{2} \end{vmatrix} =$$
$$= 27 \cdot (-1) = -27.$$

Esercizio 3. Per ogni $n \geq 1$ calcolare il determinante della matrice $n \times n$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix}.$$

Per calcolare questo determinante sarà opportuno operare con delle trasformazioni elementari sulle righe come segue: (indichiamo con v_i l'i-esimo vettore riga della matrice)

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & 3 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & 2 & 3 & \cdots & n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 - v_1 \\ v_3 - v_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n - v_{n-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Esercizio 4. Siano $x_1, \dots, x_n$ delle indeterminate. Dimostrare che

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Si tratta del determinante detto *di Vandermonde.*

Seguiamo il suggerimento procedendo con trasformazioni elementari sulle righe in modo tale da ricondurci ad una matrice dove la prima colonna è $(1, 0, 0, \dots, 0)$:

$$det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2 & \cdots & x_n^2 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & x_3^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} v_1 \\ v_2 - x_1 \cdot v_1 \\ v_3 - x_1 \cdot v_2 \\ \cdots \\ \cdots \\ v_n - x_1 \cdot v_{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 & \cdots & x_n - x_1 \\ 0 & x_2(x_2 - x_1) & x_3(x_3 - x_1) & \cdots & x_n(x_n - x_1) \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ 0 & x_2^{n-2}(x_2 - x_1) & x_3^{n-2}(x_3 - x_1) & \cdots & x_n^{n-2}(x_n - x_1) \end{vmatrix} =$$

(sfruttando lo sviluppo di Laplace rispetto alla prima colonna e la multilinearità della funzione determinante)

$$= 1 \cdot \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_2 & x_3 & \cdots & x_n \\ . & . & \cdots & . \\ . & . & \cdots & . \\ x_2^{n-2} & x_3^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \end{vmatrix}.$$

Abbiamo quindi ricondotto il problema al calcolo di una matrice $n-1 \times n-1$ costruita in modo analogo a quella di partenza. Procedendo come sopra deduciamo che

$$det = \prod_{j=2}^{n}(x_j - x_1) \cdot \prod_{j=3}^{n}(x_j - x_2) \cdot \ldots \cdot (x_n - x_{n-1}) = \prod_{i<j}(x_j - x_i).$$

Esercizio 5. Dati n punti $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ in $\mathbb{R}^2$, con $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, dimostrare che esiste esattamente un polinomio reale $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_{n-1}x^{n-1}$, di grado al più $n-1$, tale che $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$.

Un polinomio è univocamente identificato dai suoi coefficienti $\{a_i\}_{i\in\mathbb{N}}$, quindi seguendo il suggerimento, interpretiamo $p(x_1) = y_1, \ldots, p(x_n) = y_n$ come un sistema lineare di n equazioni nelle incognite $a_0, \ldots, a_{n-1}$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_{n-1}x_1^{n-1} = y_1 \\ a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_{n-1}x_2^{n-1} = y_2 \\ \ldots \\ a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \ldots + a_{n-1}x_n^{n-1} = y_n \end{cases}$$

e cerchiamone una soluzione.
In forma matriciale questo può essere riscritto come

$$\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ . & . & . & \cdots & . \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Affinché esista un'unica soluzione al sistema, è necessario che la matrice sia di rango massimo o equivalentemente abbia determinante non nullo.
La matrice in questione risulta essere la matrice trasposta della matrice vista nell'esercizio precedente, quindi il suo determinante sarà il determinante di Vandermonde $\prod_{i<j}(x_j - x_i)$.
Dal momento che per ipotesi $x_i \neq x_j$ per $i \neq j$, risulta che $det \neq 0$, quindi c'è unicità ed esistenza di una soluzione per il sistema.