Lezione 3. Ottobre 2019

giovedì 3 ottobre 2019 11:17

Obiettivo: dato un sistema lineare qualunque, costruire un sist. lineare che abbia esattamente le stesse soluzioni e con matrice dei coeff. A SCALA.

Def.: Due sist. lineari si dicono **EQUIVALENTI** se i loro insiemi di soluzioni coincidono.

METODO (DI GRADINIZZAZIONE) DI GAUSS:

Introduciamo 3 operazioni sulle equazioni che compaiono in $A \cdot x = b$, o equiv. 3 operazioni sulle righe della

$$(A|b) = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

Operazioni elementari:

OE1: Scambio di due righe della $(A|b)$

$$(A|b)_{(i)} \longleftrightarrow (A|b)_{(j)}$$

riga i

(eq. scambiare 2 equazioni)

OE2: Moltiplicazione di una riga di $(A|b)$ per $c \in \mathbb{K}$, $c \neq 0$

$$(A|b)_{(i)} \longleftrightarrow c \cdot (A|b)_{(i)}$$

(eq. molt. 1 equazione per costante non nulla)

OE3 Sostituzione di una riga di $(A|b)$ con la somma della stessa riga e un multiplo non nullo di altra riga

$$(A|b)_{(i)} \longleftrightarrow (A|b)_{(i)} + c\,(A|b)_{(j)}$$

$c \neq 0$

Teorema: Le operazioni OE1, OE2, OE3 trasformano un sistema $A \cdot x = b$ in un sistema equivalente.

Dim. OE1 & OE2: è facile vedere che l'insieme delle soluzioni non cambia.

OE3:

$$(A|b)_{(i)} = (A_{(i)}\ b_i)$$

sia $(\tilde{A}|\tilde{b})$ la matrice completa associata al sistema ottenuto con OE3

$$(\tilde{A}|\tilde{b})_{(i)} = (A|b)_{(i)} + c \cdot (A|b)_{(j)}$$

$\tilde{A}_{(i)} = A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}$, $\tilde{b}_i = b_i + c \cdot b_j$

$s = \begin{pmatrix} s_1 \\ \vdots \\ s_n \end{pmatrix}$ è soluzione di $A \cdot X = b$

$$\Longleftrightarrow \quad A \cdot s = b \quad : \quad \begin{cases} \overbrace{A_{(1)}}^{1\times n} \cdot \overbrace{s}^{n\times 1} = \overbrace{b_1}^{1\times 1} \\ A_{(2)} \cdot s = b_2 \\ \vdots \\ A_{(i)} \cdot s = b_i \\ A_{(m)} \cdot s = b_m \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_{11} s_1 + \cdots + a_{1n} s_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1} s_1 + \cdots + a_{mn} s_n = b_m \end{cases}$$

s è soluzione $\tilde{A} \cdot x = \tilde{b} \iff$

$$\tilde{A} \cdot s = \tilde{b} \quad : \quad \begin{cases} A_{(1)} = \tilde{A}_{(1)} \cdot s = \tilde{b}_1 = b_1 \\ A_{(2)} = \tilde{A}_{(2)} \cdot s = \tilde{b}_2 = b_2 \\ \vdots \\ (A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}) \cdot s = \tilde{A}_{(i)} \cdot s = \tilde{b}_i = b_i + c \cdot b_j \\ \vdots \\ A_{(m)} = \tilde{A}_{(m)} \cdot s = \tilde{b}_m = b_m \end{cases}$$

$$(A_{(i)} + c \cdot A_{(j)}) \cdot s \overset{\text{DISTRIB.}}{=} A_{(i)} \cdot s + c \cdot A_{(j)} \cdot s$$

$$= b_i + c \cdot b_j$$

Siccome $\tilde{A}_{(j)} \cdot s = \tilde{b}_j$

$$A_{(j)} \cdot s = b_j$$

$$\Longleftrightarrow \quad A_{(i)} \cdot s + \cancel{c \cdot b_j} = b_i + \cancel{c \cdot b_j}$$

$$\Longleftrightarrow \quad A_{(i)} \cdot s = b_i$$

In altre parole: s verifica le equazioni i e j di $A \cdot X = b \iff s$ verifica le equazioni i e j di $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$ ottenuto con OE3

TEOREMA (GRADINIZZAZIONE DI GAUSS):

Dato un sist. lineare

$$A \cdot X = b \quad (*)$$

è sempre possibile trasformare $(*)$ in un sistema $\tilde{A} \cdot X = \tilde{b}$ usando OE1, OE2, OE3 e con $\tilde{A}$ a scala.

Dim.:

- considero la prima colonna non nulla di A: $\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$
- se $a_{1j} \neq 0$, ok.

  se $a_{1j} = 0$, sia a_{kj} il primo elemento non nullo e faccio OE1 $(A|b)_{(1)} \longleftrightarrow (A|b)_{(k)}$

  nuova colonna $\begin{pmatrix} \boxed{a_{kj}} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}$ $\neq 0$

- voglio che $a_{2j}, \ldots, a_{mj}$ diventino $= 0$

  faccio OE3: $(A|b)_{(2)} \longleftrightarrow (A|b)_{(2)} - \dfrac{a_{2j}}{a_{kj}} (A|b)_{(k)}$

  $(A|b)_{(3)} \longleftrightarrow (A|b)_{(3)} - \dfrac{a_{3j}}{a_{kj}} (A|b)_{(k)}$

  $\vdots$

  $(A|b)_{(m)} \longleftarrow (A|b)_{(m)} - \dfrac{a_{mj}}{a_{kj}} (A|b)_{(k)}$

Ho ottenuto una matrice

$$\begin{array}{c} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \overset{\neq 0}{a_{kj}} & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & b_1 \\ \vdots & \vdots & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdots & \cdot & b_m \end{pmatrix} \\ \qquad j \end{array}$$

Considero la sottomatrice

$$\begin{pmatrix} a_{2\,j+1} & \cdots & b_2 \\ & & \\ a_{m\,j+1} & \cdots & b_m \end{pmatrix}$$

e applico lo stesso procedimento