

---

**Università degli Studi di Trieste**  
**Corsi di Studi in Matematica e Fisica**  
**Insegnamento di Analisi Reale e Complessa - Modulo A**  
**A.A. 2019/2020**  
**Proff. Enzo Mitidieri e Eva Sincich**

---

**Programma svolto**

**Teoria della misura:** Algebre e sigma-algebre di insiemi. Spazi di misura. Misure finite e sigma-finite. Misure complete, completamento di una misura. Nozione di misura esterna. Sigma-algebra degli insiemi misurabili e misura generata dalla misura esterna. Misura esterna di Lebesgue su  $\mathbb{R}^n$  e misura di Lebesgue. Caratterizzazione degli insiemi misurabili. Insieme di Vitali. Insieme di Cantor e funzione di Cantor - Vitali. La  $\sigma$ -algebra dei Boreliani non è completa.

**Integrale di Lebesgue:** Funzioni misurabili. Funzioni semplici. Convergenza quasi ovunque e convergenza quasi uniforme. Teorema di Egorov-Severini. Convergenza in misura e convergenza alla Cauchy in misura. Approssimazione in misura di funzioni misurabili su  $\mathbb{R}^n$  con funzioni a scalino e continue. Teorema di Lusin. Integrale per funzioni semplici e per funzioni nonnegative misurabili. Teorema di Beppo Levi (della convergenza monotona) e sue conseguenze. Lemma di Fatou. Integrale di funzioni di segno variabile. Teorema di convergenza dominata di Lebesgue e sue conseguenze. Assoluta continuità dell'integrale. Teorema di derivazione sotto il segno di integrale. Confronto tra integrale di Lebesgue sulla retta e integrale di Riemann. Integrali impropri e integrale di Lebesgue.

**Spazi  $L^p$  - Differenziazione e Integrazione:** Disuguaglianze di Young, Hölder, Minkowsky. Convergenza in  $L^p$  e convergenza in misura. Densità in  $L^p$  delle funzioni semplici nulle fuori da insiemi di misura finita. Caratterizzazione duale della norma  $L^p$ , varie versioni. Disuguaglianza di Chebishev. Completezza degli spazi  $L^p$  (teorema di Riesz-Fisher). Separabilità di  $L^p$  e non separabilità di  $L^\infty$ . Differenziazione. La funzione massimale  $Mf$ . Semicontinuità della funzione massimale. La funzione massimale  $Mf$  non appartiene a  $L^1_{loc}$ . Spazio  $L^1_w$ . Il teorema di Hardy-Littlewood: la funzione massimale  $Mf$  appartiene a  $L^1_w$ . Il teorema di differenziazione di Lebesgue-Besicovitch. Misure con segno. Il teorema di decomposizione di Hahn. Decomposizione di Jordan per misure con segno. Il teorema di Radon-Nikodym. Il teorema di decomposizione di Lebesgue. Il teorema di rappresentazione di Riesz per funzionali lineari continui su  $L^p$ . Costruzione di misure prodotto. Misura prodotto su  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ . Teorema di Fubini -Tonelli.

**Testi di supporto:**

1. H. L. Royden, Real Analysis, MacMillan, 1968 ;
2. A. Tesei, Istituzioni di Analisi Superiore, Bollati Boringhieri, 1997 ;
3. W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill, 1987 ;
4. R. L. Wheeden, A. Zygmund, Measure and Integral, M. Dekker, 1977 ;
5. E.H. Lieb, M. Loss, Analysis, American Mathematical Society, 1997.

---

**Esami:** Prova orale on line sulla piattaforma MS Teams. È consentita la scelta da parte degli studenti di un argomento a piacere con cui iniziare l'esame.

**Ricevimento:** per appuntamento fissato via mail (mitidier@units.it , esincich@units.it)